

**Bachelorarbeit**

# **Elektroakustische Modellbildung und Optimierung von Lautsprechersystemen**

Florian Loacker-Schöch

**Technische Universität Graz**

Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation  
Vorstand: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gernot Kubin

Betreuer

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gerhard Graber

Graz, Oktober 2018

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

---

Ort und Datum

---

Unterschrift

## Kurzfassung

Die elektroakustischen Zusammenhänge ermöglichen es, die elektrischen, mechanischen und akustischen Anteile eines Lautsprechersystems zusammen in einem analytischen Modell zu beschreiben. Aus diesem Modell können Gleichungen für die Ausgangsgrößen des Lautsprechers bei tiefen Frequenzen berechnet und Änderungen in jedem Bereich analysiert werden. Die Analyse des berechneten Schalldruckpegels im Zeit- und Frequenzbereich gibt Rückschlüsse auf die Klangcharakteristik des Lautsprechersystems. In umgekehrte Richtung ermöglicht die Vorgabe der Klangcharakteristik die Optimierung der Parameter eines Lautsprechersystems.

In dieser Arbeit wird die Modellbildung der Lautsprechersysteme, Lautsprecher mit geschlossenem und Bassreflexgehäuse, durchgeführt und die Optimierung des Gehäuses auf die gewünschte Klangcharakteristik hergeleitet. Das Modell des Lautsprechers in der unendlichen Schallwand wird dabei zur Ermittlung der Modellparameter genutzt.

Zur einfacheren Analyse und Dimensionierung der Lautsprechersysteme wurde anschließend ein Matlab Programm erstellt. Es basiert auf den hergeleiteten Gleichungen und beinhaltet alle Grenzen der Modellbildung. Mit diesem Programm ist es nun möglich, die Lautsprechersysteme in allen physikalischen Bereichen auf die gewünschte Klangcharakteristik zu optimieren.

## Abstract

The electroacoustic analogies provide the possibility to describe the electrical, mechanical and acoustic parts of a loudspeaker system together in an analytical model. This is useful to find equations for the entire system. The analysis of the calculated sound pressure level in time and frequency domain relates to the sound characteristics of a loudspeaker. On the other hand the specification of the sound characteristics defines the required parameters of the loudspeaker system.

In this thesis loudspeaker systems with closed and bassreflex enclosures are modelled and the optimization for the desired sound characteristics are derived. The model of the loudspeaker in the infinite baffle is convenient to find the model parameters.

A Matlab program was developed to analyse and dimension the loudspeaker systems. The derivated equations and model boundaries were integrated into the program. Now the Matlab program is the ideal tool to optimize a loudspeaker in all aspects to the desired sound characteristics.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Elektroakustische Zusammenhänge</b>	<b>3</b>
2.1. Elektrische Elemente . . . . .	3
2.1.1. Elektrischer Widerstand . . . . .	4
2.1.2. Elektrische Kapazität . . . . .	4
2.1.3. Elektrische Induktivität . . . . .	5
2.2. Mechanische Elemente . . . . .	5
2.2.1. Mechanischer Reibwiderstand . . . . .	5
2.2.2. Mechanische Masse . . . . .	6
2.2.3. Mechanische Feder . . . . .	6
2.3. Akustische Elemente . . . . .	7
2.3.1. Akustischer Reibwiderstand . . . . .	8
2.3.2. Akustische Masse . . . . .	8
2.3.3. Akustische Feder . . . . .	9
2.4. Zusammenschaltung der Elemente . . . . .	11
2.5. Impedanzbetrachtung . . . . .	11
2.6. Dynamischer Wandler . . . . .	12
2.7. Mechanoakustischer Wandler . . . . .	14
<b>3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand</b>	<b>16</b>
3.1. Funktionsweise des Elektrodynamischen Lautsprechers . . . . .	16
3.2. Elektroakustische Modellbildung . . . . .	18
3.2.1. Elektromechanische Komponenten . . . . .	18
3.2.2. Schallabstrahlung der Membran . . . . .	19
3.2.3. Strahlungsimpedanz der Membran . . . . .	28
3.2.4. Elektroakustische Komponenten . . . . .	33
3.3. Transformation des Modells ins Elektrische . . . . .	33
3.4. Vereinfachung des elektrischen Modells . . . . .	34
3.5. Thiele-Small Parameter . . . . .	35
3.6. Elektrische Impedanz . . . . .	38
3.7. Akustisch abgestrahlte Leistung . . . . .	39

## Inhaltsverzeichnis

3.8. Schalldruckpegel . . . . .	43
3.9. Wirkungsgrad . . . . .	43
3.10. Membranauslenkung . . . . .	44
<b>4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse</b>	<b>47</b>
4.1. Funktionsweise des geschlossenen Gehäuses . . . . .	47
4.1.1. Auswirkung von Dämmmaterial im Gehäuse . . . . .	48
4.2. Elektroakustische Modellbildung . . . . .	48
4.3. Transformation des Modelles ins Elektrische . . . . .	49
4.4. Vergleich mit der unendlichen Schallwand . . . . .	50
4.5. Berechnung der resultierenden Größen . . . . .	52
4.6. Klangcharakteristik und Optimierung . . . . .	53
<b>5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse</b>	<b>56</b>
5.1. Funktionsweise des Bassreflexgehäuses . . . . .	56
5.1.1. Bassreflexrohr als akustische Masse . . . . .	56
5.1.2. Strahlungsimpedanz des Bassreflexrohres . . . . .	59
5.2. Elektroakustische Modellbildung . . . . .	60
5.3. Transformation des Modelles ins Elektrische . . . . .	61
5.4. Vereinfachung des elektrischen Modelles . . . . .	62
5.5. Elektrische Impedanz . . . . .	63
5.6. Akustisch abgestrahlte Leistung . . . . .	66
5.7. Berechnung der resultierenden Größen . . . . .	68
5.8. Membranauslenkung . . . . .	69
5.9. Klangcharakteristik und Optimierung . . . . .	69
<b>6. Matlab Programm</b>	<b>72</b>
6.1. Funktionsweise und Bedienung . . . . .	72
6.2. Beschreibung der Parameter . . . . .	74
<b>7. Zusammenfassung</b>	<b>77</b>
<b>Literatur</b>	<b>82</b>
<b>A. Vergleich der Filtercharakteristiken</b>	<b>83</b>
<b>B. Quelle des Matlab Programmes</b>	<b>86</b>

# 1. Einleitung

Die folgende Arbeit entstand aus dem Wunsch, Lautsprechersysteme für das Bauen der Gehäuse physikalisch verstehen und optimieren zu können.

Von Anfang an wurde viel Wert auf das Entwerfen und Bauen der Lautsprechergehäuse gelegt. Die physikalische Funktionsweise sollte hergeleitet und an realen Lautsprechern getestet werden. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Herleitungen für das Verständnis der Lautsprechersysteme und das Matlab Programm zur Dimensionierung und Optimierung der Lautsprecher, weil der praktische Teil den Umfang der Bachelorarbeit übersteigen würde.

Die Realisierung eines modularen Lautsprechersystems wird in einer Folgearbeit »Realisierung eines modularen Lautsprechersystems« fortgesetzt und beschreibt den Entwurf und das Bauen eines modularen Lautsprechers, mit dem die Klangcharakteristiken im Hörvergleich und durch Messungen verglichen werden können.

In Kapitel 2 dieser Arbeit werden die physikalischen Zusammenhänge zwischen der elektrischen, mechanischen und akustischen Domäne beschrieben. Die Funktionsweise der Lautsprechersysteme kann in diesen drei Bereichen mit elektrischen, mechanischen und akustischen Elementen für tiefe Frequenzen modelliert werden. Für die gemeinsame Analyse ist es deshalb notwendig, dass zwischen den Domänen Zusammenhänge bestehen und diese miteinander beschrieben werden können.

Im Kapitel 3 wird der Lautsprecher in der unendlichen Schallwand behandelt. Er ist ein wichtiges Modell, um den elektrodynamischen Lautsprecher ohne Gehäuse beschreiben zu können. Aus einer Impedanzmessung an den Lautsprecherklemmen werden die Thiele-Small-Parameter ermittelt und die Modellparameter berechnet. Die grundlegende Funktionsweise des Lautsprechers wird hier erstmals erläutert und daraus die Modellbildung mit elektroakustischen Elementen vorgenommen.

In weiterer Folge kann das Modell in die elektrische Domäne transformiert werden. Die komplexe Rechnung bietet sich hier besonders gut an, um die Ausgangsgrößen des Lautsprechers möglichst einfach berechnen zu können. Die akustisch abgestrahlte Leistung, der Schalldruckpegel, sowie der Wirkungsgrad und die Membranauslenkung können somit aus den Thiele-Small-Parametern direkt berechnet werden. Es ist dadurch möglich, die Eigenschaften des Lautsprechers aus den Angaben des Herstellers zu berechnen und die Klangeigenschaften im Vorhinein abzuschätzen.

Der Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse basiert auf den Erkenntnissen des Lautsprechers in der unendlichen Schallwand und wird in Kapitel 4 beschrieben.

## 1. Einleitung

Zur Verhinderung des akustischen Kurzschlusses wird hier die Rückseite des Lautsprecherchassis mit einem luftdichten Gehäuse abgeschlossen. Das eingeschlossene Luftvolumen verändert jedoch das Verhalten des Lautsprechers. Durch die geschickte Wahl des Gehäusevolumens kann der Lautsprecher auf die gewünschte Klangcharakteristik optimiert werden. Die Bedingungen dafür werden hergeleitet und Anhaltspunkte mit Hilfe von Filtereigenschaften zur Klangoptimierung gegeben.

Als letztes wird in Kapitel 5 der Lautsprecher im Bassreflexgehäuse beschrieben, das das interessanteste aber auch komplexeste System darstellt. Das Lautsprechergehäuse wird als akustischer Resonator benutzt, um den linearen Bereich des Lautsprechers zu tiefen Frequenzen hin zu erweitern. Die richtige Abstimmung des Lautsprechersystems spielt auch hier eine wichtige Rolle. Das Modell des Lautsprechers im geschlossenen Gehäuse wird erweitert und die Ausgangsgrößen berechnet. Aus dem Koeffizientenvergleich des berechneten Schalldruckpegels und der allgemeinen Filterfunktion ergibt sich ein Gleichungssystem für die Optimierung des Gehäuses. Mit Hilfe von Matlab kann das Gleichungssystem in kurzer Zeit gelöst und die Gehäuseparameter berechnet werden. Somit ist dieses Lautsprechersystem ebenfalls auf die gewünschte Klangcharakteristik optimierbar.

Für die einfachere Dimensionierung und Optimierung der Lautsprechersysteme wurde zum Schluss ein Matlab Programm aus den hergeleiteten Gleichungen erstellt. Es bietet die Möglichkeit, ein Lautsprecherchassis noch vor dem Kaufen zu analysieren. Für die weitere Optimierung können Änderungen der Lautsprecherparameter genau untersucht und die Auswirkungen auf die Ausgangsgrößen berechnet werden. Zudem lassen sich die Gehäuseparameter der beiden Lautsprechersysteme für die gewünschte Filtercharakteristik automatisch berechnen. Das Programm ist somit das optimale Werkzeug, um die beschriebenen Lautsprechersysteme entwerfen und optimieren zu können.

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

Für die Analyse des elektrodynamischen Lautsprechers müssen die elektrischen, mechanischen und akustischen Einflüsse zusammen betrachtet werden. Jedoch unter welchen Bedingungen ist die Modellbildung des elektroakustischen Systems möglich?

In diesem Kapitel werden die physikalischen Zusammenhänge in diesen drei Domänen untersucht.

### 2.1. Elektrische Elemente

Aus historischer Sicht gesehen entwickelte sich die Systemanalyse im elektrischen Bereich durch die Entwicklung des Telefons und des Radios besonders früh. Zur einfacheren Analyse wurden im Elektrischen neue Methoden entwickelt, um komplexe physikalische Systeme einfacher darzustellen. Es ist somit sinnvoll, als erstes diesen Bereich genauer zu betrachten.

Die Effekte in der Elektrotechnik sind durch Differentialgleichungen beschreibbar. Aufgrund der komplexen mathematischen Handhabung der Differentialgleichungen wurden Schaltungssymbole festgelegt, die die Eigenschaften der einzelnen Komponenten repräsentieren. Die Verbindungsleitungen werden als verlustlos angenommen und stellen die Zusammenwirkung der Komponenten untereinander dar. Für diese Darstellung ist es notwendig, dass die Komponenten als konzentrierte Bauelemente angenommen werden können.

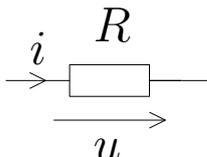
Die Annahme von konzentrierten Bauelementen ist möglich, wenn die Wellenlänge der übertragenen Signale viel größer als die Abmessungen der Bauelemente und Verbindungsleitungen sind. Der Vorteil liegt darin, dass die Ortsabhängigkeit der Wellenausbreitung vernachlässigt werden kann und nur noch die Zeitabhängigkeit der Differentialgleichungen betrachtet werden muss.

Je nachdem welches zeitliche Verhalten der Schaltung untersucht werden soll, können weitere mathematische Vereinfachungen vorgenommen werden. Beispielsweise kann im eingeschwungenen Zustand und bei sinusförmigen Signalen mit der komplexen Rechnung viel einfacher gerechnet werden.

### 2.1.1. Elektrischer Widerstand

Das einfachste elektrische Bauelement ist der Widerstand  $R$ . Er stellt die Proportionalitätskonstante zwischen Strom  $i$  und Spannung  $u$  dar und ist zeitunabhängig. Die elektrische Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt.

Seine physikalische Definition lautet: Der elektrische Widerstand beträgt ein Ohm, wenn zwischen zwei Punkten eines metallischen Leiters bei einem Spannungsabfall von einem Volt genau ein Ampere fließt.



$$u(t) = R \cdot i(t) \quad \underline{U} = R \cdot \underline{I} \quad [R] = \Omega \quad (2.1)$$

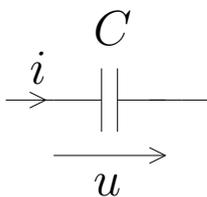
In (2.1) ist das Schaltplansymbol und die physikalische Grundgleichung in zeitabhängiger Form und in komplexer Darstellung mit Einheit angegeben. Diese Struktur wird nun zur besseren Vergleichbarkeit beibehalten.

### 2.1.2. Elektrische Kapazität

Die elektrische Kapazität  $C$  ist das zweite wichtige passive Bauelement in der Elektrotechnik. Sie ist die Proportionalitätskonstante für die gespeicherte Ladungsmenge  $Q$  bei einer angelegten Spannung  $u$  zwischen zwei leitfähigen Platten. Der Kondensator speichert somit elektrische Ladungen und Energie.

$$Q(t) = C \cdot u(t) \quad (2.2) \quad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2.3)$$

Mit Hilfe der Stromstärke (2.3) als bewegte Ladungen pro Zeiteinheit und (2.2) entsteht folgender Zusammenhang zwischen Strom und Spannung.



$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} \quad [C] = F \quad (2.4)$$

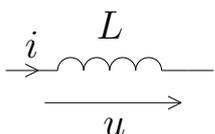
Die Gleichung (2.4) ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

### 2.1.3. Elektrische Induktivität

Die elektrische Induktivität  $L$  basiert auf der Grundlage des Induktionsgesetzes. Es besagt, dass jede zeitliche Änderung des Flusses  $\phi$  in einer Leiterschleife eine elektrische Spannung  $u$  induziert. In einer Spule ist die induzierte Spannung (2.5) proportional zur Windungszahl  $N$  und zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses  $\phi$ .

$$u(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.5) \quad N \cdot \phi(t) = L \cdot i(t) \quad (2.6)$$

Befindet sich die Spule in keinem von außen wirkenden Magnetfeld, dann ist der Gesamtfluss (2.6) proportional zum derzeitigen fließenden Strom und der geometrieabhängigen Induktivität. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich folgender Zusammenhang für Strom und Spannung.



The diagram shows a horizontal wire with a coil in the middle. An arrow labeled 'i' points to the right into the coil. Another arrow labeled 'u' points to the right below the wire. The letter 'L' is written above the coil.

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I} \quad [L] = H \quad (2.7)$$

Hier ist die Differentialgleichung in der zeitlichen Darstellung leicht erkennbar. Die Spule speichert elektrische Energie im Magnetfeld. Die Energie wird dabei nicht in Wärme umgewandelt.

## 2.2. Mechanische Elemente

Die Mechanik ist wie auch die Elektrotechnik ein Teilgebiet der Physik. Zur Beschreibung von Experimenten werden auch hier oft Differentialgleichungen benutzt. Es liegt somit nahe, mechanische Grundelemente in gleicher Form wie in der Elektrotechnik darzustellen.

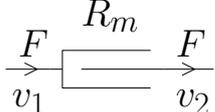
### 2.2.1. Mechanischer Reibwiderstand

Der mechanische Reibwiderstand  $R_m$ , auch Strömungswiderstand genannt, ist eine spezielle Form der Reibung. Sie tritt hauptsächlich in Fluiden, also gasförmigen oder flüssigen Materialien auf. Bei laminaren Strömungen ist die Reibungskraft  $F$  proportional zur Strömungsgeschwindigkeit  $v$ .

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

Wird die Strömungsgeschwindigkeit zu groß, kommt es an der Körperoberfläche durch die Reibungskraft zu Rotationsbewegungen und Wirbeln. Nun ist die Strömung turbulent und der beschriebene Zusammenhang nicht mehr gültig.

Für laminare Strömungen kann ein linearer Reibungswiderstand wie in der Elektrotechnik definiert werden. Die Reibungsenergie wird hier ebenfalls in Wärme umgesetzt.



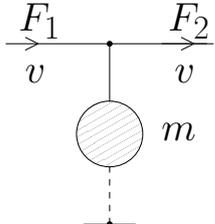
$$F(t) = R_m \cdot v(t) \quad \underline{E} = R_m \cdot \underline{v} \quad [R_m] = \frac{kg}{s} \quad (2.8)$$

### 2.2.2. Mechanische Masse

Die Masse  $m$  eines Körpers ist die Trägheit, die gegen eine Bewegungsänderung wirkt. Nach dem 2. Newton'schen Axiom ist sie die Proportionalitätskonstante zwischen der aufgewendeten Kraft  $F$  und der tatsächlichen Beschleunigung  $a$  des Körpers. Aufgrund der Erdanziehungskraft muss die Erde immer als Bezugspunkt für die Trägheit der Masse gewählt werden.

$$F(t) = m \cdot a(t) \quad (2.9) \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.10)$$

Mit dem 2. Newton'schen Axiom (2.9) und der Definition der Beschleunigung (2.10) ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit.



$$F(t) = m \frac{dv(t)}{dt} \quad \underline{E} = j\omega m \cdot \underline{v} \quad [m] = kg \quad (2.11)$$

### 2.2.3. Mechanische Feder

Bei der mechanischen Feder wird das Hooke'sche Gesetz (2.12) angewandt. Es besagt, dass die Längenänderung  $x$  eines Materials proportional zur einwirkenden Kraft  $F$  ist. Die verwendete Proportionalität wird Federkonstante  $s_m$  genannt.

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

$$F(t) = s_m \cdot x(t) \quad (2.12) \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.13)$$

Mit der Definition der Geschwindigkeit (2.13) folgt mit dem Hooke'schen Prinzip folgender Zusammenhang.

$$\begin{array}{c} s_m \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \text{---} \xrightarrow{F} \\ v_1 \qquad \qquad \qquad v_2 \end{array} \end{array} \quad F(t) = s_m \int v(t) dt \quad \underline{F} = \frac{s_m}{j\omega} \cdot \underline{v} \quad [s_m] = \frac{kg}{s^2} \quad (2.14)$$

### 2.3. Akustische Elemente

Zwischen den elektrischen und mechanischen Elementen lassen sich große Ähnlichkeiten feststellen. Es ist naheliegend, dass wir gerne die akustischen Elemente in ähnlicher Form beschreiben wollen. Ist das jedoch in der Akustik möglich?

Der menschliche Hörbereich befindet sich zwischen 20Hz und 20kHz. Mit der Definition der Wellenlänge in einem Medium (2.15) und der Schallgeschwindigkeit  $c$  in der Luft ( $c = 343,2m/s$  bei  $20^\circ C$ ) ergeben sich dafür Wellenlängen von 17m bis 1,7cm.

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2.15)$$

Die Abmessungen von Räumen und den Objekten darin sind ebenfalls in diesem Bereich. Die Wellenlängen sind je nach Frequenz größer oder kleiner als die Abmessungen und es kann im Allgemeinen nicht mehr von konzentrierten Elementen ausgegangen werden. Bei tiefen Frequenzen, wenn die Wellenlänge größer als das Objekt ist, beugt sich die Schallwelle um das Objekt herum. Bei hohen Frequenzen, die Wellenlänge ist kleiner als die Abmessungen, wird die Welle an der Oberfläche reflektiert und zurückgeworfen.

Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, das akustische Verhalten mit konzentrierten Elementen zu modellieren. Die Gültigkeit wird zu einem späteren Zeitpunkt bei der jeweiligen Anwendung genauer untersucht.

Im folgenden Kapitel wird nun versucht, ähnliche akustische Grundelemente wie im Elektrischen und Mechanischen festzulegen.

### 2.3.1. Akustischer Reibwiderstand

Akustische Schallwellen werden mit den Feldgrößen Druck  $p$  und Schnelle  $v$  der Luftteilchen beschrieben. Wird in ein Schallfeld ein Rohr eingebracht, so fließt der Schall mit der Schnelle  $v$  durch die Querschnittsfläche  $A$  und es entsteht ein Schallfluss  $q$ . Die physikalischen Definitionen von Druck (2.16) und Schallfluß (2.17) sind folgendermaßen gegeben.

$$p = \frac{F}{A} \quad (2.16) \quad q = A \cdot v \quad (2.17)$$

Der akustische Reibwiderstand  $R_a$  basiert auf der gleichen physikalischen Reibung wie der mechanische Reibungswiderstand. Hier wird speziell der gasförmige Fall genauer betrachtet. Wenn die Luft durch ein poröses Material strömt, reiben die Luftteilchen an der Materialstruktur und die Bewegungsenergie wird in Wärme umgewandelt. Da eine Schallwelle aus bewegten Luftteilchen besteht, ist dieser Zusammenhang auch hier gültig. Aus dem mechanischen Reibwiderstand (2.8) und den Definitionen für Druck (2.16) und Schallfluss (2.17) lässt sich folgendes herleiten.

$$p(t) = \frac{R_m}{A^2} q(t) = R_a \cdot q(t)$$

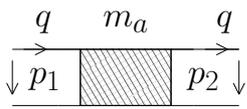


$$p(t) = R_a \cdot q(t) \quad \underline{p} = R_a \cdot \underline{q} \quad [R_a] = \frac{\text{kg}}{\text{s m}^4} \quad (2.18)$$

### 2.3.2. Akustische Masse

Die akustische Masse  $m_a$  kann als konphas hin und her schwingende Luftmasse betrachtet werden. Dabei wird angenommen, dass die Luft nicht komprimiert wird und keine Reibung auftritt. Das 2. Newton'schen Axiom ist hier ebenfalls gültig. Setzt man den Schalldruck (2.16), Schallfluss (2.17) und die Definition für die Beschleunigung (2.10) ein, erhält man die folgende Bewegungsgleichung.

$$p(t) = \frac{m}{A^2} \frac{dq(t)}{dt} = m_a \frac{dq(t)}{dt}$$



$$p(t) = m_a \frac{dq(t)}{dt} \quad \underline{p} = j\omega m_a \cdot \underline{q} \quad [m_a] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^4} \quad (2.19)$$

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

Mit der Dichte (2.20) als Masse pro Volumen lässt sich die akustische Masse praktischer darstellen. Die Fläche  $A$  und Länge  $l$  sind dabei die Abmessungen der Luftmasse.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.20) \quad V = A \cdot l \quad (2.21)$$

$$m_a = \frac{m}{A^2} = \frac{\rho V}{A^2} = \frac{\rho l}{A} \quad (2.22)$$

### 2.3.3. Akustische Feder

Die akustische Feder ist das letzte akustische Grundelement. Es berücksichtigt die Komprimierbarkeit der Luft. Angenommen, man hat ein geschlossenes Luftvolumen, auf das an einer Fläche eine gleichmäßige Kraft wirkt. Durch die Kraft wird die Luft komprimiert, was zu einer auslenkungsproportionalen Rückstellkraft führt. Dieses Verhalten gleicht dem der mechanischen Feder.

Mit dem Hooke'schen Prinzip (2.12) und den Gleichungen für Druck (2.16) und Schallfluss (2.17) lässt sich die Steifigkeit der Luft im Akustischen beschreiben.

$$p(t) = \frac{s_m}{A^2} \int q(t) dt = s_a \int q(t) dt$$

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ s_a \end{array}$$

$$p(t) = s_a \int q(t) dt \quad \underline{p} = \frac{s_a}{j\omega} \underline{q} \quad [s_a] = \frac{kg}{s^2 m^4} \quad (2.23)$$

Wie hängt hier jedoch die akustische Steifigkeit mit Luftvolumen zusammen?

Es wird dazu von der adiabatischen Zustandsgleichung (2.24) für ideale Gase ausgegangen.

$$p \cdot V^\kappa = \text{konstant} \quad (2.24) \quad \kappa = \frac{C_p}{C_V} \quad (2.25)$$

Der Adiabatenexponent  $\kappa$  ist das Verhältnis von der Wärmekapazität bei konstantem Druck  $C_p$  und bei konstantem Volumen  $C_V$ .

Aus der Zustandsänderung folgt, dass bei einer zusätzlichen Druckänderung  $\Delta p$  das Volumen um  $\Delta V$  abnehmen muss.

$$p \cdot V^\kappa = (p + \Delta p)(V - \Delta V)$$

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

$$p = (p + \Delta p) \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^\kappa$$

Wenn  $\Delta V \ll V$  kann die Gleichung durch Abbruch der Reihenentwicklung vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} p &= (p + \Delta p) \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V}\right) \\ p &= p \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V}\right) + \Delta p \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V}\right) \\ \Delta p \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V}\right) &= p \kappa \frac{\Delta V}{V} \\ \Delta p - \kappa \Delta p \frac{\Delta V}{V} &= p \kappa \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

Wenn  $\Delta V \ll V$  und  $\Delta p \ll p$ , dann ist  $\Delta p \cdot \Delta V$  vernachlässigbar klein.

$$\Delta p = p \kappa \frac{\Delta V}{V}$$

Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit in Gasen (2.26) wird der Adiabatenexponent umgeschrieben.

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad (2.26)$$

$$\Delta p = c^2 \rho \frac{\Delta V}{V} \quad (2.27)$$

Aus der Gleichung (2.23) für kleine Druckänderungen, dem Schallfluss (2.17) und der Volumensänderung als  $\Delta V = A \cdot \Delta x$  lässt sich die akustische Steifigkeit von komprimierter Luft berechnen.

$$\Delta p = s_a \int \Delta q dt = s_a A \int \Delta v dt = s_a \cdot A \Delta x = s_a \cdot \Delta V$$

$$s_a = \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{c^2 \rho}{V} \quad (2.28)$$

### 2.4. Zusammenschaltung der Elemente

Die einzelnen Elemente im elektrischen, mechanischen und akustischen Bereich wurden im letzten Kapitel genauer untersucht. Wie können diese jetzt in der jeweiligen Domäne zusammengeschaltet werden?

In der Elektrotechnik wird das Zusammenwirken der Elemente über die Struktur des Netzwerkes in einem Schaltplan vorgegeben. Die Verbindungen zwischen den Elementen sind verlustlos und können an Knotenpunkten aufgeteilt werden. Die Spannung am Knoten ist durch die ideale Verbindung an jeder Position gleich. Der Stromfluss teilt sich jedoch je nach Spannungsdifferenz auf die Verbindungen am Knoten auf. Die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme an einem Knoten muss dabei Null sein.

Die Spannung an einem Bauelement ist als Potentialdifferenz (Potentialgröße) definiert und an den Anschlussdrähten direkt messbar. Der Strom (Flussgröße) fließt durch das Bauelement hindurch und kann nur indirekt durch Einbringen eines bekannten Widerstandes über Spannungsmessung und Umrechnung ermittelt werden.

In der Mechanik kann die Messung der Geschwindigkeit über Strecken- und Zeitmessung direkt erfolgen. Für die Kraftmessung muss jedoch ein Kraftsensor in die Messstrecke eingebaut werden. Es macht somit Sinn, die Geschwindigkeit als Potentialgröße und die Kraft als Flußgröße festzulegen.

In der Akustik ist der Schalldruck direkt durch ein Mikrofon messbar. Die Schallschnelle und somit auch der Schallfluss werden indirekt, meistens mit einer Schalldruckdifferenzmessung durchgeführt. Sinnvollerweise ist der Schalldruck die Potentialgröße und der Schallfluss die Flußgröße.

Mit diesen Festlegungen können nun strukturgleiche Netzwerke in den Domänen erstellt und miteinander verglichen werden. Die Knoten- und Maschenregeln aus der Elektrotechnik gelten somit auch in mechanischen und akustischen Netzwerken.

### 2.5. Impedanzbetrachtung

In elektroakustischen Lautsprechern werden Wechselsignale ohne Gleichanteil verwendet. Es ist sinnvoll, die komplexe Rechnung zur Vereinfachung anzuwenden.

In der Elektrotechnik ist die komplexe Impedanz als Verhältnis von komplexer Spannungsdifferenz  $\underline{U}$  zur komplexen Stromstärke  $\underline{I}$  definiert. Ist es möglich, die Impedanz auch in den anderen Domänen festzulegen?

Die einfachste elektrische Impedanz ist der ideale Widerstand. Er stellt die frequenzunabhängige Proportionalitätskonstante zwischen Spannung und Strom dar. In

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

der Mechanik entspricht der mechanische Reibungswiderstand dieser Proportionalitätskonstante. Aus der Gleichung (2.8) folgt, dass die mechanische Impedanz als Verhältnis von komplexer Kraft  $\underline{F}$  zur komplexen Geschwindigkeit  $\underline{v}$  festgelegt werden kann.

In der Akustik ist der Reibwiderstand ebenfalls definiert. Die akustische Impedanz folgt aus der Gleichung (2.18) als Verhältnis von komplexem Druck  $p$  und komplexer Schallschnelle  $q$ . Im folgenden sind die drei Impedanzen dargestellt.

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad (2.29) \quad \underline{Z}_m = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} \quad (2.30) \quad \underline{Z}_a = \frac{p}{q} \quad (2.31)$$

### 2.6. Dynamischer Wandler

Als nächster Schritt stellt sich die Frage, wie das elektroakustische Modell als gesamtes Netzwerk modelliert und untersucht werden kann. Dafür werden physikalische Gesetzmäßigkeiten ausgenutzt, um Gleichungen zwischen den unterschiedlichen Domänen zu finden.

Der elektrodynamische Lautsprecher basiert auf dem Prinzip des dynamischen Wandlers. Der einfachste elektrodynamische Wandler ist ein Leiterstück in einem statischen Magnetfeld. Es können zwei physikalische Gesetze festgestellt werden.

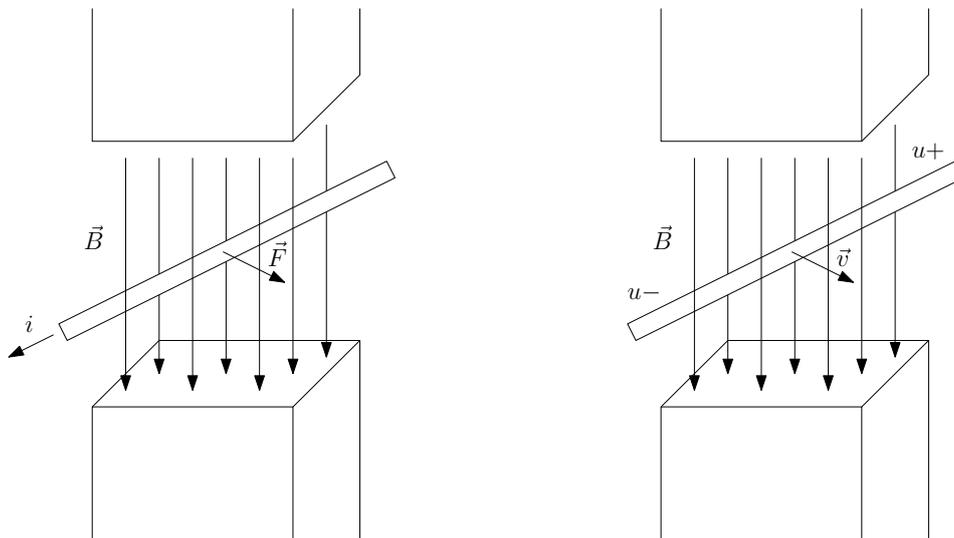


Abbildung 2.1.: Grundprinzipien des elektrodynamischen Wandlers

Im ersten Fall wird der Leiter durch einen Strom  $i$  durchflossen. Durch das resultierende magnetische Feld aus dem Stromfluss und dem statischen Magnetfeld

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge

$B$  entsteht eine auf den Leiter wirkende Kraft  $F$ . Die Kraft wird Lorenz-Kraft genannt. Ist die Leitungsrichtung normal zum magnetischen Feld, vereinfacht sich die Lorenz-Gleichung (2.32) auf (2.33). Aus der Gleichung ist ein proportionaler Zusammenhang bei konstantem Feld und konstanter Länge zwischen Kraft und Stromstärke ersichtlich.

$$\vec{F} = i(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (2.32) \qquad F = Bl \cdot i \quad (2.33)$$

Beim zweiten Experiment wird der Leiter im Magnetfeld bewegt. Durch die zeitliche Änderung des Flusses entsteht eine induzierte Spannungsdifferenz am Leiter. Mit dem Induktionsgesetz (2.34) und der Definition des Flusses (2.35) kann dieses Experiment beschrieben werden. In Abbildung 2.1 sind die beiden Experimente dargestellt.

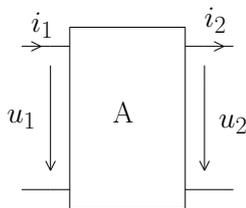
$$u = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.34) \qquad \phi = \int \vec{B} d\vec{A} \quad (2.35)$$

Wird die Fläche  $A$  als Leiterlänge  $l$  mal die bewegte Strecke  $x$  und die Definition der Geschwindigkeit (2.13) eingesetzt, erhält man folgenden Zusammenhang. Die induzierte Spannung ist bei konstantem Magnetfeld und gleichbleibender Leitungslänge proportional zur Geschwindigkeit.

$$u = \frac{dA}{dt} B = \frac{dx}{dt} l B = Bl \cdot v \quad (2.36)$$

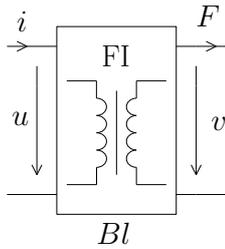
Es wurden nun zwei einfache Gleichungen gefunden, die den Zusammenhang zwischen den Fluss- und Potentialgrößen der elektrischen und mechanischen Domäne beschreiben. Die Flussgrößen aus beiden Domänen sind proportional zueinander. Bei den Potentialgrößen ist das ebenfalls der Fall. Daraus folgt, dass die Strukturen der Netzwerke in beiden Domänen gleich sind.

Mit Hilfe der Zweitorthorie lässt sich eine Kettenmatrix und ein dazugehöriges Bauelement für den idealen dynamischen Wandler erstellen. Die Gleichungen (2.33) und (2.36) in die allgemeine Kettenmatrix (2.37) eingesetzt, ergibt den dynamischen Wandler in Abbildung 2.38.



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge



$$\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Bl & 0 \\ 0 & \frac{1}{Bl} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Die Kettenmatrix des dynamischen Wandlers besitzt die gleiche Form wie der ideale Übertrager in der Elektrotechnik. In der Literatur wird deshalb oft das Schaltplansymbol des Übertragers verwendet.

In dieser Arbeit ist der dynamische Wandler als Kettenmatrix und die Eigenschaften des Wandlers durch die Bezeichnung und die Andeutung des Übertragers dargestellt. Er wandelt elektrischen Strom in mechanische Kraft und Spannung in Geschwindigkeit um. Dabei bleibt die Struktur des umgewandelten Netzwerks erhalten.

Wie wird nun eine komplexe Impedanz von einer Seite auf die andere gewandelt? Aus der elektrischen Impedanz und den Gleichungen (2.33) und (2.36) kann der folgende Zusammenhang zur mechanischen Impedanz gefunden werden.

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Bl \cdot \underline{v}}{\frac{1}{Bl} \cdot \underline{F}} = B^2 l^2 \frac{\underline{v}}{\underline{F}} = B^2 l^2 \frac{1}{\underline{Z}_m} \quad (2.39)$$

### 2.7. Mechanoakustischer Wandler

Der mechanoakustische Wandler bildet den Zusammenhang zwischen mechanischer und akustischer Domäne. Über die Gleichungen von Schalldruck und Schallfluss lässt sich dieser Zusammenhang einfach beschreiben.

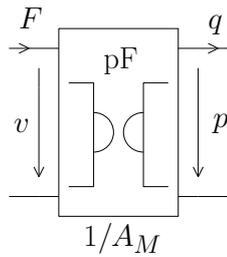
$$p = \frac{F}{A} \quad (2.40)$$

$$q = A \cdot v \quad (2.41)$$

Die Potentialgröße ist hier jeweils proportional zur Flussgröße der anderen Domäne. Es folgt daraus, dass die Netzwerke in den beiden Domänen nicht mehr strukturgleich sind. Eine Serienschaltung wird zur Parallelschaltung und umgekehrt.

Werden die Gleichungen (2.40) und (2.41) in die allgemeine Kettenmatrix (2.37) eingesetzt, erhält man das Bauelement (2.42) des mechanoakustischen Wandlers.

## 2. Elektroakustische Zusammenhänge



$$\begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A_M} \\ A_M & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

In der Elektrotechnik wird das ideale Bauelement, das Strom in Spannung umwandelt, Gyrator genannt. Die Kettenmatrix des mechanoakustischen Wandlers besitzt die gleiche Form wie die des idealen Gyrators. In der Literatur wird deshalb oft das Symbol des Gyrators verwendet.

Wie wird hier eine komplexe Impedanz von einer Seite auf die andere gewandelt? Die Gleichungen (2.40) und (2.41), eingesetzt in die mechanische Impedanz, ergibt folgenden Zusammenhang mit der akustischen Impedanz.

$$\underline{Z}_m = \frac{F}{v} = \frac{A_M \cdot p}{\frac{1}{A_M} \cdot q} = A_M^2 \frac{p}{q} = A_M^2 \cdot \underline{Z}_a \quad (2.43)$$

## 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Der elektrodynamische Lautsprecher in der unendlichen Schallwand eingebaut, ist eine spezielle Betrachtungsweise des Lautsprechers. Sie wird verwendet, um die Eigenschaften des Lautsprecherchassis ohne Einfluss des Lautsprechergehäuses beschreiben zu können.

Bei tieffrequenten Musiksignalen ist die Wellenlänge größer als die Abmessungen des Lautsprecherchassis. Ohne unendliche Schallwand beugt sich die von vorne abgestrahlte Schallwelle um das Chassis herum und überlagert sich mit der nach hinten abgestrahlten Schallwelle. Bei tiefen Frequenzen löschen sich die Schallwellen von vorne und hinten aus und können nicht mehr abgestrahlt werden. Dieser Vorgang wird akustischer Kurzschluss genannt.

Durch die unendliche Schallwand wird der akustische Einfluss vor und nach der Lautsprechermembran komplett getrennt und die Abstrahlung erfolgt nur noch nach vorne. In der Praxis wird der akustische Kurzschluss durch das zusätzliche Lautsprechergehäuse verhindert.

### 3.1. Funktionsweise des Elektrodynamischen Lautsprechers

In diesem Kapitel wird die Funktionsweise des elektrodynamischen Lautsprechers für die spätere Modellbildung genauer beschrieben.

In Abb. 3.1 ist der symmetrische Schnitt eines elektrodynamischen Lautsprechers dargestellt. Wird eine Wechselspannung an den Anschlusskabeln des Lautsprechers angelegt, entsteht ein wechselförmiger Stromfluss in der Schwingspule. Der Permanentmagnet erzeugt einen magnetischen Fluss durch die Polplatte und den Polkern, der zu einem homogenen Magnetfeld im Luftspalt zwischen der Polplatte und dem Polkern führt. Auf die Windungen der Schwingspule wirkt aufgrund des Stromflusses die Lorenz-Kraft, weshalb die Schwingspule je nach Stromrichtung nach links oder rechts ausgelenkt wird. Bei wechselförmiger Anregung schwingt die Schwingspule hin und her. Die Lautsprechermembran ist an der Schwingspule befestigt. Sie schwingt mit der gleichen Geschwindigkeit mit und versetzt die Luftteilchen an der

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Oberfläche der Membran in Bewegung. Die Schwingung der Luftteilchen wird in der Luft weitergegeben und es bildet sich eine Schallwelle aus.

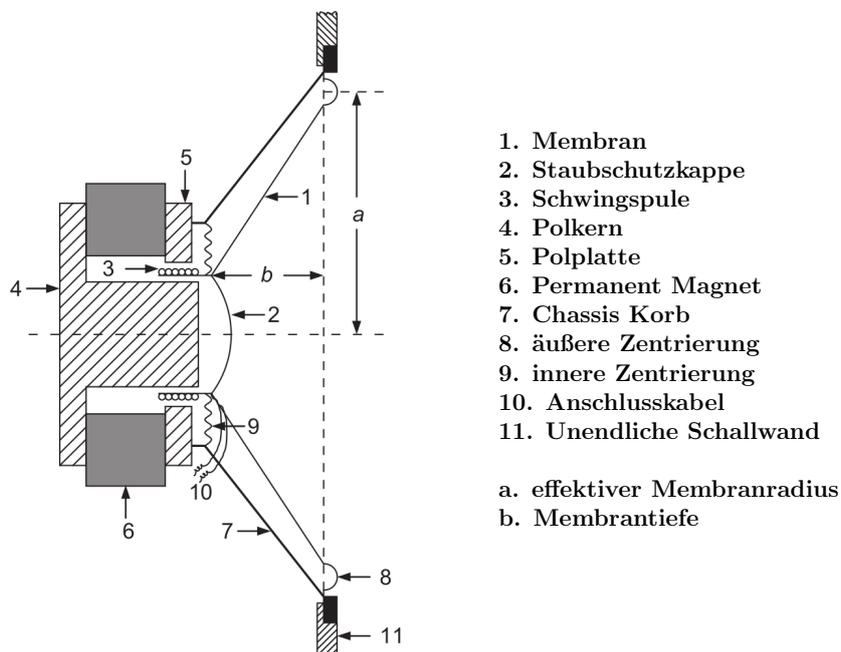


Abbildung 3.1.: Funktionsweise des elektrodynamischen Lautsprechers [1, Abb. 6.1]

Die Lautsprechermembran wird von der inneren und äußeren Zentrierung in der Mitte des Chassis Korbes gehalten. Diese Aufhängung sorgt durch die Rückstellkraft der Zentrierungen für eine berührungsfreie Vor- und Rückbewegung der Membran. Die Staubschutzkappe schützt das Innere des Chassis vor Verunreinigungen und verhindert die akustische Kopplung zwischen Vorder- und Rückseite.

Für ein gutes Lautsprecherchassis muss die Membran und die darauf angebrachte Schwingspule möglichst leicht sein. Andererseits sollte sie möglichst steif sein, da sich sonst ungewollte Biegeschwingungen in der Membran ausbreiten. Diese führen bei hohen Frequenzen zu unregelmäßigen Schwingungsformen und Abstrahlungen. Um diese Resonanzen möglichst lange zu verhindern, wird die Membran für bessere Steifigkeit kegelförmig konstruiert.

Physikalisch ist es nicht möglich, ein lineares Lautsprecherchassis über den ganzen Hörbereich zu bauen. Deshalb wird die Bauweise auf bestimmte Frequenzbereiche optimiert und mehrere Chassis in einem Lautsprecher miteinander kombiniert.



#### 3.2.2. Schallabstrahlung der Membran

In der akustischen Domäne kann nicht allgemein von konzentrierten Bauelementen ausgegangen werden. Je nach Wellenlänge und den Abmessungen der betrachteten Objekte wirken sich unterschiedliche physikalische Effekte aus. Bei tiefen Frequenzen (Wellenlänge ist größer als die Abmessungen), beugt sich die Schallwelle um das Objekt herum und bei hohen (Wellenlänge kleiner als die Abmessungen) wird die Schallwelle reflektiert. In den Frequenzbereichen dazwischen bilden sich Mischformen aus. Zusätzlich überlagern sich die unterschiedlichen Schallwellen und es entstehen ort- und zeitabhängige Schallfelder. Hier ist es sinnvoll die akustischen Effekte mathematisch in allgemeiner Form zu beschreiben. Unter bestimmten Randbedingungen ist es teilweise möglich, konzentrierte akustische Elemente für die Modellierung zu verwenden.

Im Folgenden wird die Schallabstrahlung der Membran mathematisch genauer beschrieben. Aus den gewonnenen Erkenntnissen wird dann der nutzbare Frequenzbereich eines Lautsprecherchassis festgelegt.

#### Kugelwellenabstrahlung

Eine kugelförmige pulsierende Quelle strahlt Kugelwellen aus. Sie ist die Basis, um Punktquellen und in weiterer Folge die Schallabstrahlung der Membran beschreiben zu können. In der Praxis ist sie jedoch nur schwer realisierbar. [1, Kap. 4.10]

Für die mathematische Beschreibung wird von der Wellengleichung (3.1) ausgegangen. Die Wellengleichung kann aus der 2. Newton'schen Bewegungsgleichung, dem Gasgesetz für ideale Gase und der Kontinuitätsgleichung hergeleitet werden. Die Herleitung ist in *Acoustics: Sound Fields and Transducers* von Beranek und Mellow in Kapitel 2.2.4 [1] zu finden.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Sie beinhaltet den ort- und zeitabhängigen Schalldruck und die Schallgeschwindigkeit. Für Kugelkoordinaten kann sie auf folgende Form umgeschrieben werden. Der Schalldruck  $p(r, t)$  wird hier im Abstand  $r$  vom Zentrum der pulsierenden Quelle beschrieben.

$$\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(pr)}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Eine Lösung der Wellengleichung ist durch den komplexen exponentiellen Lösungsansatz mit (3.3) [1, Gl. 2.99] gegeben.

$$\underline{p}(r, t) = \left( p_h \frac{1}{r} e^{-jkr} + p_r \frac{1}{r} e^{jkr} \right) e^{j\omega t} \quad (3.3)$$

In dieser Gleichung ist  $p_h$  der Schalldruck der hin- und  $p_r$  der rücklaufenden Schallwelle. Im Exponenten der hin- und rücklaufenden Welle ist die Ortsabhängigkeit und die Wellenzahl (3.5) enthalten. Im letzten Exponenten wird die Zeitabhängigkeit  $t$  und die Kreisfrequenz (3.4) dargestellt.

$$\omega = 2\pi f \quad (3.4) \qquad k = \frac{\omega}{c} \quad (3.5)$$

Da durch die Quelle kugelförmige Wellen abgestrahlt werden und keine Reflexionen auftreten, kann die rücklaufende Welle vernachlässigt werden. Mit  $\underline{p} = p e^{j\omega t}$  als harmonisch schwingender Schalldruck vereinfacht sich (3.3) auf Folgendes.

$$\underline{p}(r) = \underline{p}_h \frac{1}{r} e^{-jkr} \quad (3.6)$$

Der Schalldruck  $p_h$  ist ein unbekannter Koeffizient. Zur Bestimmung des Koeffizienten müssen Randbedingungen festgelegt werden.

Die Schnelle  $v(R)$  der Luftteilchen an der Kugeloberfläche muss physikalisch bedingt gleich sein, wie die Geschwindigkeit  $v_0$  der schwingenden Kugeloberfläche.

$$\underline{v}(R) = \underline{v}_0 \quad (3.7)$$

In Abbildung 3.4 ist die Kugelwelle graphisch dargestellt. Der Schalldruck  $p(r)$  und die Schnelle  $v(r)$  sind die gesuchten Größen im Schallfeld.

Für die Verwendung der Randbedingungen muss eine Gleichung für die Schallschnelle an der Kugeloberfläche gefunden werden. Mit der Euler'schen Bewegungsgleichung (3.8) [1, Gl. 2.4b] kann diese beschrieben werden.

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.8)$$

Die Kugeloberfläche schwingt hier nur in radialer Richtung. Die Gleichung vereinfacht sich folgendermaßen und kann weiters auf die Schallschnelle umgeformt werden.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

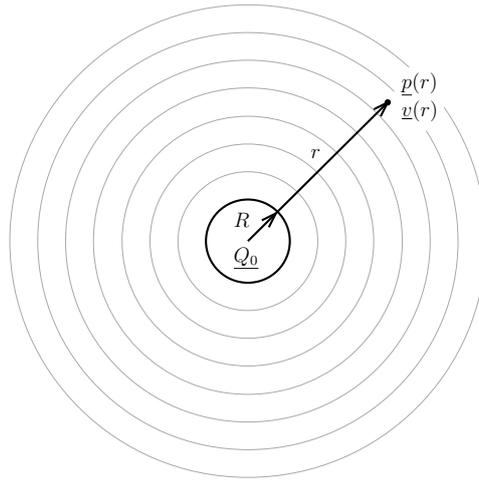


Abbildung 3.4.: Darstellung der Kugelwelle

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$v = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial r} dt$$

Nun wird  $\underline{v} = v e^{j\omega t}$  und  $\underline{p} = p e^{j\omega t}$  für harmonisch schwingende Größen eingesetzt.

$$\underline{v} = v e^{j\omega t} = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial r} e^{j\omega t} dt$$

$$\underline{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{j\omega} \frac{\partial p}{\partial r} e^{j\omega t} = \frac{-1}{jk\rho_0 c} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.9)$$

Die Gleichung (3.6) in  $p(r)$  eingesetzt und mit Hilfe der Produktregel partiell nach  $r$  abgeleitet, ergibt Folgendes.

$$\underline{v} = \frac{1 + jkr}{jk\rho_0 cr^2} \underline{p}_h e^{-jkr} \quad (3.10)$$

$$\underline{p}_h = \frac{jk\rho_0 cr^2}{1 + jkr} e^{jkr} \underline{v} \quad (3.11)$$

Mit den Randbedingungen (3.7) folgt daraus.

$$\underline{p}_h = \frac{jk\rho_0 cR^2}{1 + jkR} e^{jkR} \underline{v}_0 \quad (3.12)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Zur Beschreibung von Quellen wird typischerweise die Ergiebigkeit  $Q$  (3.13) verwendet. Sie gibt in der Akustik die Schallschnelle durch die ganze Oberfläche der Quelle an. Für eine Kugelquelle lässt sie sich weiter auf (3.14) vereinfachen.

$$Q = \oint_A \vec{v} d\vec{A} \quad (3.13)$$

$$Q_0 = 4\pi R^2 \cdot v_0 \quad (3.14)$$

Mit der Ergiebigkeit und dem Radius  $R$  der Quelle ist der Koeffizient  $p_h$  definiert.

$$\underline{p}_h = \frac{jk\rho_0 c}{1 + jkR} \frac{e^{jkR}}{4\pi} \underline{Q}_0 \quad (3.15)$$

Der Koeffizient in (3.3) eingesetzt, ergibt die spezielle Lösung für die Wellengleichung und den Schalldruck  $p(r)$  im Abstand  $r$  von der Schallquelle.

$$\underline{p}(r) = \frac{jk\rho_0 c}{1 + jkR} \frac{e^{-jk(r-R)}}{4\pi r} \underline{Q}_0 \quad (3.16)$$

Der Koeffizient (3.15) und (3.10) ergibt die Schallschnelle  $v(r)$  im Abstand  $r$ .

$$\underline{v}(r) = \frac{1 + jkr}{1 + jkR} \frac{e^{-jk(r-R)}}{4\pi r^2} \underline{Q}_0 \quad (3.17)$$

Die Strahlungsimpedanz ist damit im gleichen Abstand  $r$  ebenfalls gegeben.

$$Z(r) = \frac{\underline{p}(r)}{\underline{v}(r)} = \frac{jkr}{1 + jkr} \rho_0 c \quad (3.18)$$

#### Schallabstrahlung der Punktquelle

Die Punktquelle ist eine kugelförmige pulsierende Quelle, jedoch mit unendlich kleinem Radius  $R$ . Die Schallabstrahlung ist auch hier kugelförmig. Praktisch ist diese Quelle nicht realisierbar, in der Theorie leistet sie jedoch gute Dienste. [1, Kap. 4.11] In Abbildung 3.5 ist die Punktquelle dargestellt.

Für die mathematische Beschreibung werden die Ergebnisse der Kugelwellenabstrahlung verwendet und der Radius der pulsierenden Quelle unendlich klein gemacht.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

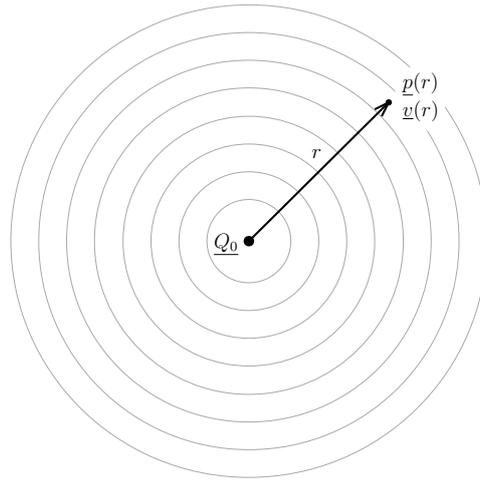


Abbildung 3.5.: Darstellung der Punktquelle

$$\underline{p}(r) = \lim_{R \rightarrow 0} \left( \frac{jk\rho_0 c}{1 + jkR} \frac{e^{-jk(r-R)}}{4\pi r} \underline{Q}_0 \right) = jk\rho_0 c \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underline{Q}_0 \quad (3.19)$$

$$\underline{v}(r) = \lim_{R \rightarrow 0} \left( \frac{1 + jkr}{1 + jkR} \frac{e^{-jk(r-R)}}{4\pi r^2} \underline{Q}_0 \right) = (1 + jkr) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r^2} \underline{Q}_0 \quad (3.20)$$

$$Z(r) = \frac{\underline{p}(r)}{\underline{v}(r)} = \frac{jk\rho_0 c}{1 + jkr} \quad (3.21)$$

#### Schallabstrahlung der Kolbenmembran

Die Kolbenmembran ist ein idealisiertes Modell für die Schallabstrahlung und Strahlungsimpedanz der Lautsprechermembran. In den meisten Anwendungsfällen ist diese Beschreibung für die reale Membran ausreichend genau. [1, Kap. 13.7]

Es wird angenommen, dass die Membran aus einer kolbenförmigen Scheibe in der unendlichen Schallwand besteht. Sie ist sehr steif und die gesamte Oberfläche schwingt harmonisch in z-Richtung vor und zurück. Durch die unendliche Schallwand wird festgelegt, dass die Membran nur nach vorne Schallwellen abstrahlt. Für die Betrachtung der Schallabstrahlung wird der Schalldruck im Punkt  $P(r, \vartheta)$  in einem verlustfreiem Medium berechnet. Das beschriebene Modell ist in Abbildung 3.6 schematisch dargestellt.

Für die mathematische Beschreibung des Schalldruckes  $p(r, \vartheta)$  im Punkt  $P$  wird das Huygens-Fresnelsche Prinzip verwendet. Es besagt, dass jeder Punkt auf einer Wellenfront durch eine Punktquelle ersetzt werden kann. Die resultierende Wellenfront,

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

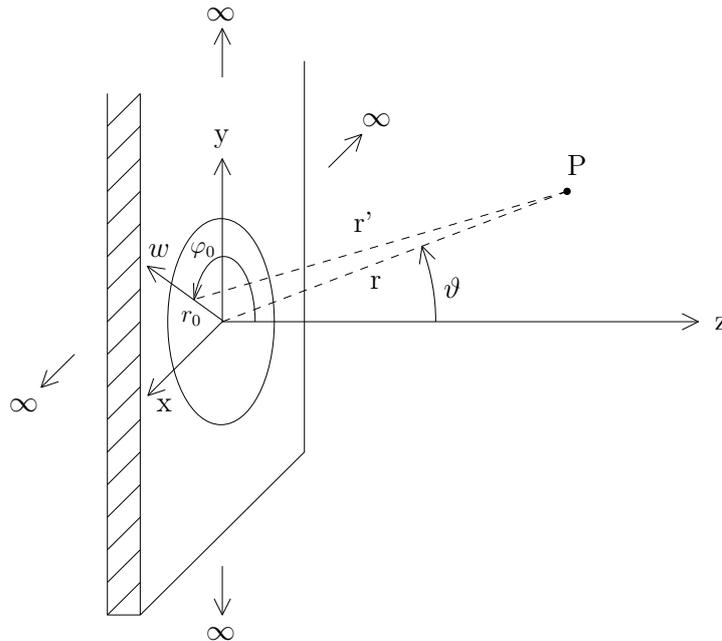


Abbildung 3.6.: Kolbenmembran in unendlicher Schallwand

gebildet durch die Überlagerung der Punktquellen, ist genau die gleiche wie die ursprüngliche.

Die kreisförmige Fläche der Kolbenmembran kann als Summe von Punktquellen auf jedem Flächenelement der Kreisscheibe gebildet werden.

Der Schalldruck der Punktquelle (3.19) wird folgendermaßen erweitert. Der Vektor  $\vec{r}$  ist die Position des Schalldrucks im gesuchten Punkt  $P$  und  $\vec{r}_0$  die Position der Punktquelle auf der Kreisscheibe.

$$\underline{p}(\vec{r}') = jk\rho_0c \underline{Q}_0 \underbrace{\frac{e^{-jk(\vec{r}-\vec{r}_0)}}{4\pi(\vec{r}-\vec{r}_0)}}_{G(\vec{r}|\vec{r}_0)} \quad (3.22)$$

Der Schalldruck  $p(\vec{r}')$  beschreibt den resultierenden Schalldruck einer Punktquelle im Punkt  $P$  des Schallfelds. Die Green'sche Funktion  $G(\vec{r}|\vec{r}_0)$  ist dabei die Änderung des Schalldrucks aufgrund des Abstandes  $\vec{r}'$  von der Punktquelle. Sie stellt zudem eine wichtige mathematische Funktion zur Lösung von inhomogenen linearen partiellen Differentialgleichungen dar und ist folgendermaßen definiert.

$$G(\vec{r}|\vec{r}_0) = \frac{e^{-jk(\vec{r}-\vec{r}_0)}}{4\pi(\vec{r}-\vec{r}_0)} \quad (3.23)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Für die Kolbenmembran müssen Randbedingungen festgelegt werden. Innerhalb des Membranradius  $r_M$  ist die Schnelle der Luftteilchen durch die Geschwindigkeit der Membranoberfläche vorgegeben. Außerhalb von  $r_M$  ist die Geschwindigkeit aufgrund der starren unendlichen Schallwand Null. Für den Schalldruck gelten an der Membranoberfläche dadurch folgende Randbedingungen.

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial z} \underline{p}(w, z) = -jk\rho_0 c \underline{v}_0 \quad 0 \leq w \leq r_M \quad (3.24)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial z} \underline{p}(w, z) = 0 \quad r_M < w \leq \infty \quad (3.25)$$

Mit dem Huygens-Fresnelsche Prinzip kann die schwingende Oberfläche als Summe der Teilergiebigkeiten der Flächenelemente beschrieben werden. Wenn die Geschwindigkeit  $v_0$  normal auf die Oberfläche ist, vereinfacht sich die Ergiebigkeit (3.13) zu folgendem Ausdruck.

$$d\underline{Q}_0(\vec{r}_0) = \underline{v}_0(\vec{r}_0) dA_0 \quad (3.26)$$

Die Überlagerung der einzelnen Punktquellen auf der Oberfläche kann allgemein mit (3.27) beschrieben werden. Mit  $dA_0 = r_0 dr_0 d\varphi_0$  und den Randbedingungen ergibt sich daraus (3.28) für die Kolbenmembran. Der Faktor 2 berücksichtigt dabei, dass die ganze Schallabstrahlung der Punktquellen nur nach vorne erfolgt. Die Ergiebigkeiten bleiben dadurch erhalten.

$$\underline{p}(\vec{r}) = jk\rho_0 c \iint \underline{v}_0(\vec{r}_0) G(\vec{r}|\vec{r}_0) dA_0 \quad (3.27)$$

$$\underline{p}(r, \vartheta) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_M} -jk\rho_0 c \underline{v}_0 G(r, \vartheta|w, \varphi) r_0 dr_0 d\varphi_0 \quad (3.28)$$

Die Schallabstrahlung wird hier im Fernfeld  $r \gg r_M$  betrachtet. Deshalb wird die Green'sche Funktion für Kugelkoordinaten verwendet. [1, Gl. 13.70]

$$\underline{p}(r, \vartheta) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_M} -jk\rho_0 c \underline{v}_0 \frac{1}{4\pi r} e^{-jk(r-r_0 \sin\vartheta \cos(\varphi-\varphi_0))} r_0 dr_0 d\varphi_0 \quad (3.29)$$

Mit der Integraldarstellung der Besselfunktion (3.30) [1, Appendix II: (76)] und  $\cos(\varphi - \varphi_0) = \sin(\varphi_0)$  bei  $\varphi = \pi/2$  kann das erste Integral gelöst werden. Mit (3.31) [1, Appendix II: (95)] vereinfacht sich der Schalldruck weiter.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j(z \sin\varphi - n\varphi)} d\varphi \quad (3.30)$$

$$\int_0^a J_0(bx) x dx = \frac{a}{b} J_1(ab) \quad (3.31)$$

$$\underline{p}(r, \vartheta) = \frac{-jk\rho_0 c v_0}{r} e^{-jkr} \int_0^{r_M} J_0(k \sin\vartheta r_0) r_0 dr_0 \quad (3.32)$$

$$\underline{p}(r, \vartheta) = \frac{-jk\rho_0 c v_0}{r} e^{-jkr} \frac{r_M}{k \sin\vartheta} J_1(r_M k \sin\vartheta) = -A_M \Gamma_{K_0} \underbrace{jk\rho_0 c v_0 \frac{e^{-jkr}}{2r\pi}}_{\text{Halbkugelwelle}} \quad (3.33)$$

Der berechnete Schalldruck  $p(r, \vartheta)$  enthält die Membranfläche  $A_M$ , die Schallabstrahlung einer Halbkugelwelle und den Richtungsfaktor  $\Gamma_{K_0}(\vartheta)$ . Bei tiefen Frequenzen  $kr_M \ll 1$ , wenn der Radius kleiner als die Wellenlänge ist, strahlt die Kolbenmembran halbkugelförmig ab. Der Richtungsfaktor (3.34) ist dabei unabhängig vom Winkel  $\vartheta$ . Bei hohen Frequenzen  $kr_M > 2$  wird der Richtungsfaktor stark richtungsabhängig und die Schallabstrahlung sehr ungleichmäßig.

In Abbildung 3.7 ist der logarithmierte Richtungsfaktor  $\Gamma_{K_0}(\vartheta)$  als Richtungsmaß  $D_{K_0}(\vartheta)$  (3.35) für unterschiedliche  $kr_M$  Werte dargestellt. Die starke Richtungsabhängigkeit ist gut erkennbar.

$$\Gamma_{K_0}(\vartheta) = \frac{2 J_1(r_M k \sin\vartheta)}{r_M k \sin\vartheta} \quad (3.34)$$

$$D_{K_0}(\vartheta) = 20 \log (|\Gamma_{K_0}(\vartheta)|) \quad (3.35)$$

Bei hohen Frequenzen sind die Phasenlagen und Amplituden der eintreffenden Wellen aus den Punktquellen im Punkt  $P$  unterschiedlich. Durch die phasenrichtige Addition kommt es je nach Position mehr oder weniger zur Überlagerung oder zur Auslöschung der Schalldrücke. Dieser Vorgang führt zu den Richtungsmustern in Abbildung 3.7.

Für einen optimalen Lautsprecher wünscht man sich, dass die Schallabstrahlung für alle Frequenzen und alle Richtungen gleich erfolgt. Aus der Richtungsabhängigkeit der Kolbenmembran ist die Grenze mit  $kr_M < 1/2$  gegeben. Daraus folgt mit (3.4)

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

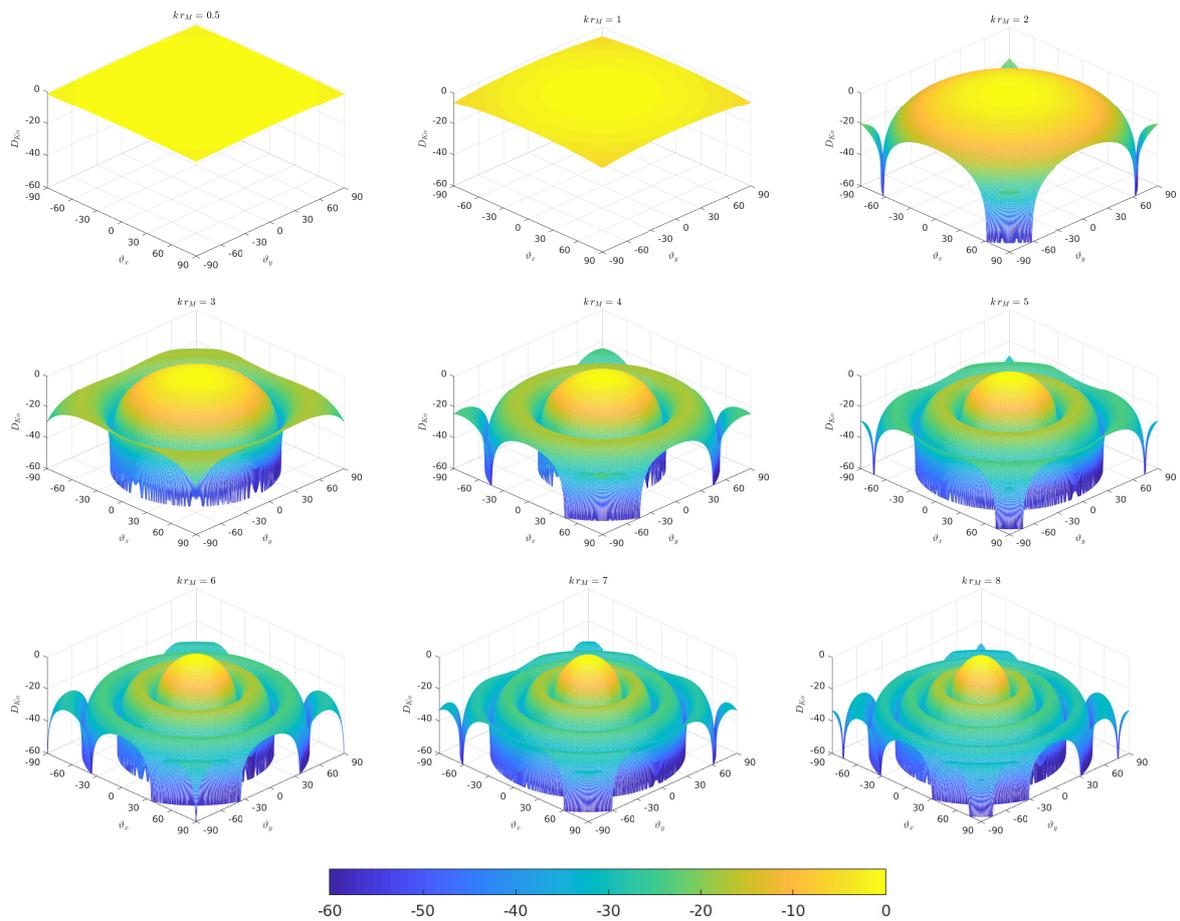


Abbildung 3.7.: Richtungsmaß der Kolbenmembran in Abhängigkeit von  $kr_M$

und (3.5), dass jedes reale Lautsprecherchassis abhängig vom Radius  $r_M$  nur bis zu einer maximalen Frequenz von  $f_{max,Ko}$  genutzt werden kann.

$$f_{max,Ko} = \frac{c}{4\pi r_M} \quad (3.36)$$

### 3.2.3. Strahlungsimpedanz der Membran

Die Luftteilchen an der Oberfläche der Lautsprechermembran werden durch die Bewegung der Membran in Schwingung versetzt. Für die Membran wirkt sich die Beschleunigung der Luftteilchen wie ein zusätzlicher komplexer Widerstand auf die Geschwindigkeit der Membran in die Bewegungsrichtung aus. Dieser Widerstand wird Strahlungsimpedanz genannt.

#### Strahlungsimpedanz der Kolbenmembran

Für die mathematische Beschreibung wird ebenfalls das Modell der Kolbenmembran in der unendlichen Schallwand verwendet. Die geometrischen Abmessungen sind wie in Abbildung 3.6 gegeben. [1, Kap. 13.7]

Mit dem Huygens-Fresnelschen Prinzip und den Randbedingungen aus (3.24) und (3.25) ergibt sich der Schalldruck  $p(w, z)$ .

$$\underline{p}(w, z) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_M} -jk\rho_0c \underline{v}_0 G(w, z|r_0, z_0) r_0 dr_0 d\varphi_0 \quad (3.37)$$

Für die Strahlungsimpedanz wird hier jedoch der Schalldruck im Nahfeld  $r < r_M$  betrachtet. Eine spezielle Form der Green'schen Funktion in Zylinderkoordinaten (3.38) kann in diesem Bereich verwendet werden. [1, Gl. 13.52]

$$G(w, z|r_0, z_0) = \frac{-j}{4\pi} \int_0^\infty J_0(k_w w) J_0(k_w r_0) \frac{e^{-jk_z|z-z_0|}}{k_z} k_w dk_w \quad (3.38)$$

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_w^2} & 0 \leq k_w \leq k \\ -j\sqrt{k_w^2 - k^2} & k_w > k \end{cases}$$

Durch die doppelte Integration mit (3.31) über die Membranoberfläche vereinfacht sich der Schalldruck folgendermaßen.

$$\underline{p}(w, z) = -r_M k \rho_0 c \underline{v}_0 \int_0^\infty J_0(k_w w) J_1(k_w r_M) \frac{1}{k_z} e^{-jk_z z} dk_w \quad (3.39)$$

Wie erhält man nun aus dem Schalldruck die Strahlungsimpedanz? Mit Hilfe der gesamten Kraft auf die Kolbenmembran (3.40) kann eine spezifische Impedanz  $Z_S$  an

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

der Oberfläche der Membran berechnet werden. Die Kraft lässt sich mit (3.31) und nach King mit der Struve'schen Funktion  $H_1$  weiter vereinfachen. [1, S. 561]

$$\underline{F} = \int_A \underline{p} dA = - \int_0^{2\pi r_M} \int_0^0 \underline{p}(w, z) \Big|_{z=0_+} w dw d\varphi \quad (3.40)$$

$$\underline{F} = r_M^2 \pi 2k \rho_0 c \underline{v}_0 \left( \int_0^k \frac{J_1^2(k_w r_M)}{k_w \sqrt{k^2 - k_w^2}} dk_w + j \int_k^\infty \frac{J_1^2(k_w r_M)}{k_w \sqrt{k^2 - k_w^2}} dk_w \right) \quad (3.41)$$

$$\underline{F} = r_M^2 \pi \rho_0 c \underline{v}_0 \left( 1 - \frac{J_1(2kr_M)}{kr_M} + j \frac{H_1(2kr_M)}{kr_M} \right) \quad (3.42)$$

Die spezifische Impedanz  $Z_S$  ergibt sich aus der Kraft  $\underline{F}$  bezogen auf die Ergiebigkeit  $\underline{Q}_0 = r_M^2 \pi v_0$  der Membranoberfläche. Da die Kraft eine mechanische Größe ist, muss diese für die Strahlungsimpedanz  $Z_a$  in den Schalldruck umgerechnet werden. Die Ergiebigkeit ist eine akustische Größe und kann als Schallfluss einer akustischen Quelle betrachtet werden. Für die Umrechnung in die Strahlungsimpedanz  $Z_a$  wird die spezifische Impedanz  $Z_S$  durch die Membranfläche  $A_M$  dividiert.

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{F}}{\underline{Q}_0} = \rho_0 c \left( 1 - \frac{J_1(2kr_M)}{kr_M} + j \frac{H_1(2kr_M)}{kr_M} \right) \quad (3.43)$$

$$\underline{Z}_a = \frac{p}{q} = \frac{\underline{Z}_S}{A_M} = R_a + j X_a \quad (3.44)$$

### Modellierung mit akustischen Elementen

Im nächsten Schritt wird versucht, die Strahlungsimpedanz mit akustischen Elementen zu modellieren. Dazu stellt man die Bessel- und Struve'schen Funktion als Taylorreihe dar und bricht die Reihe nach einer gewissen Ordnung ab. Für diese Approximationen werden passende akustische Elemente gesucht. Sind diese gefunden, wird der resultierende Fehler durch den Abbruch analysiert.

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \mathcal{O}(x^7) \quad (3.45)$$

$$H_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(k + \frac{5}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \frac{2x^2}{3\pi} - \frac{2x^4}{45\pi} + \frac{2x^6}{1575\pi} + \mathcal{O}(x^7) \quad (3.46)$$

Die Reihenentwicklungen der Bessel- und Struve'schen Funktionen sind in (3.45) und (3.46) angeschrieben. Damit lassen sich mit den Gliedern bis zur 3. Ordnung folgende Elemente finden.

$$R_a = \frac{\rho_0 c}{A_M} \left(1 - \frac{J_1(2kr_M)}{kr_M}\right) \approx \frac{\rho_0}{2\pi c} \omega^2 \quad (3.47)$$

$$X_a = \frac{\rho_0 c}{A_M} \left(\frac{H_1(2kr_M)}{kr_M}\right) \approx \omega \underbrace{\frac{8\rho_0}{3\pi^2 r_M}}_{m_a} \quad (3.48)$$

Aus dem Realteil  $R_a$  der Strahlungsimpedanz wird durch die Approximation der akustische Reibwiderstand bestimmt. Der akustische Reibwiderstand ist normalerweise wie in (2.18) gezeigt eine frequenzunabhängig Größe. Durch das  $\omega^2$  in (3.47) wird der Reibungswiderstand jedoch stark frequenzabhängig. Diese Frequenzabhängigkeit muss bei der weiteren elektroakustischen Modellbildung besonders berücksichtigt werden.

Der approximierter imaginäre Teil  $X_a$  der Strahlungsimpedanz ist frequenzabhängig und kann verglichen mit (2.19) als frequenzunabhängige akustische Masse beschrieben werden.



Abbildung 3.8.: Einfaches akustisches Modell für die Strahlungsimpedanz

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Die einfache Näherung der Strahlungsimpedanz als Serienschaltung des frequenzabhängigen Reibwiderstandes und der akustischen Masse ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Im Vergleich zur Strahlungsimpedanz der Kolbenmembran in Abbildung 3.9 ist diese Näherung nur für tiefe Frequenzen gültig. Bei  $kr_M < 1/2$  beträgt der relative Fehler für  $R_a = 4,1\%$  und  $X_a = 6,5\%$ . Bis zu dieser Frequenz ist das Modell sinnvoll nutzbar.

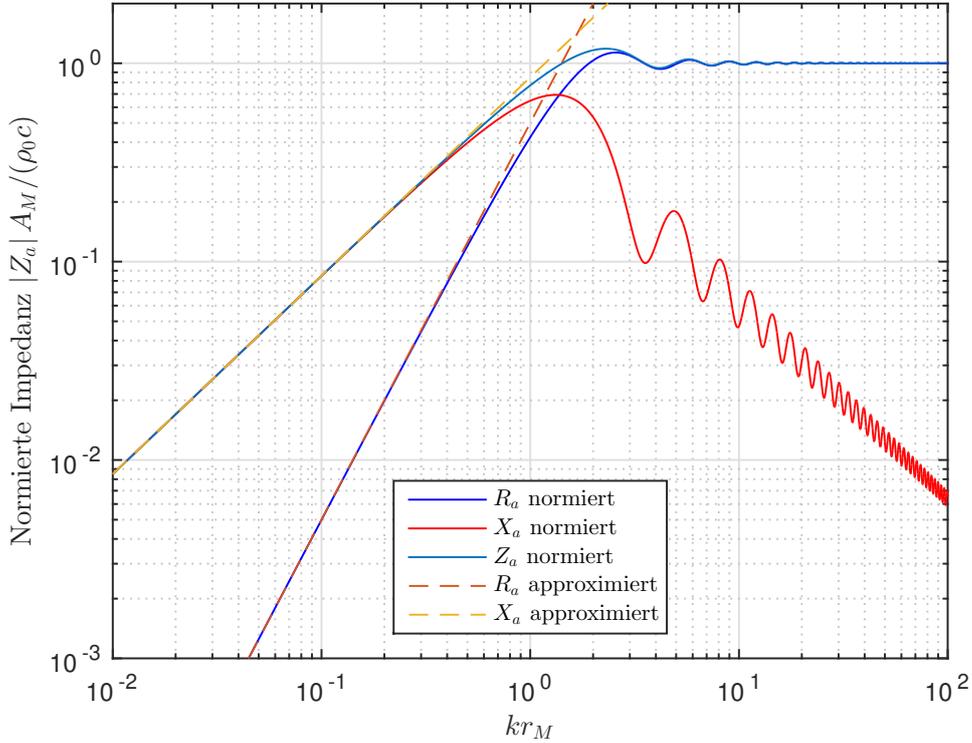


Abbildung 3.9.: Normierte Strahlungsimpedanz mit einfacher Näherung für tiefe Frequenzen

Mit Hilfe eines erweiterten akustischen Modells kann die Strahlungsimpedanz über den gesamten Frequenzbereich modelliert werden. Das Modell dafür ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Die Werte der akustischen Elemente wurden für die beste Annäherung im Mittel bestimmt. Wie in Abbildung 3.11 zu sehen ist, kann bis auf die Welligkeit um  $kr_M = 1$  die Strahlungsimpedanz gut modelliert werden. [1, Kapitel 4.19]

$$R_{a1} = 0,1404 \frac{\rho_0 c}{r_M^2} \quad (3.49)$$

$$R_{a2} = \frac{\rho_0 c}{\pi r_M^2} \quad (3.50)$$

$$s_a = 0,53 \frac{\rho_0 c^2}{\pi r_M^3} \quad (3.51)$$

$$m_a = \frac{8\rho_0}{3\pi^2 r_M} \quad (3.52)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

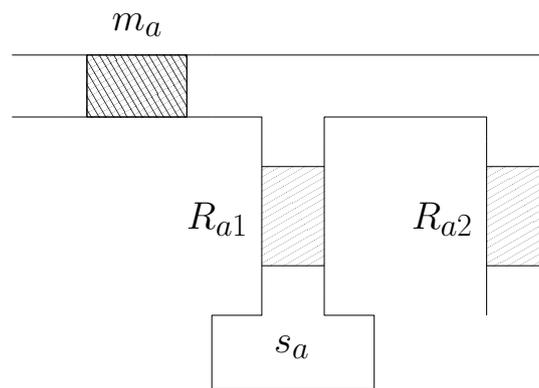


Abbildung 3.10.: Erweitertes akustisches Modell für die Strahlungsimpedanz

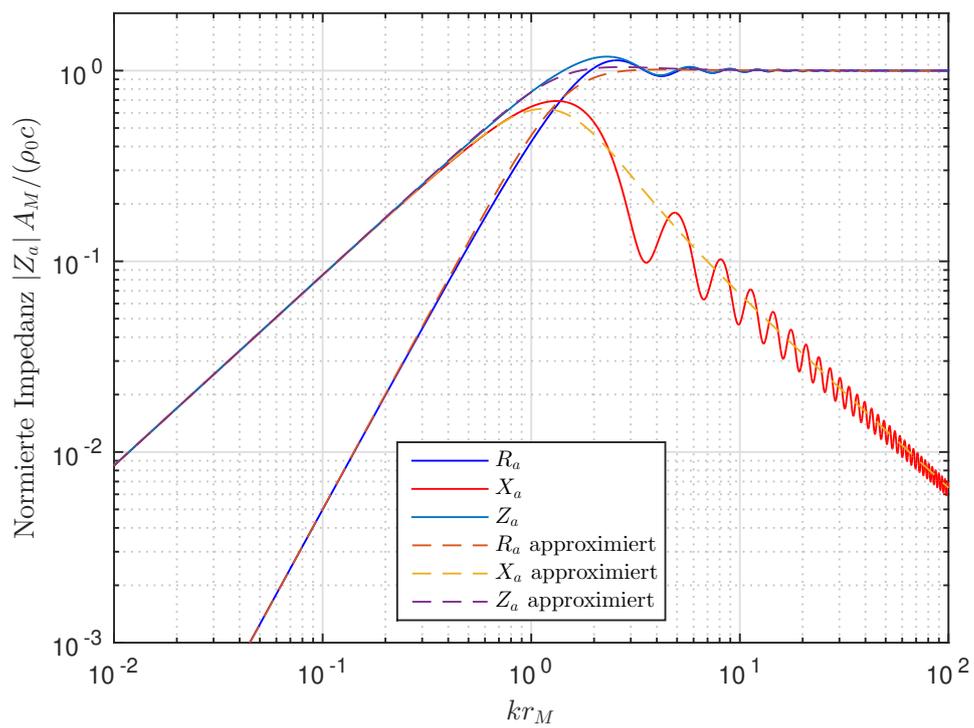


Abbildung 3.11.: Normierte Strahlungsimpedanz mit erweiterter Näherung für alle Frequenzen

### 3.2.4. Elektroakustische Komponenten

Das elektromechanische Modell kann nun mit der Strahlungsimpedanz für die unendliche Schallwand erweitert werden. Für die gültige Annahme von konzentrierten Elementen müssen die Abmessungen des Lautsprechers viel kleiner als die Wellenlänge sein. Es ist somit ausreichend, die Strahlungsimpedanz mit dem einfachen akustischen Modell zu modellieren. Das Modell in Abbildung 3.12 ist bis  $kr_M < 1/2$  gültig.

Der mechanoakustische Wandler stellt im Modell die Wandlung von der mechanischen Domäne in die akustische dar. Auf der akustischen Seite sind die Anschlüsse schematisch in Vorderseite (oben) und Rückseite (unten) der Lautsprechermembran aufgeteilt. Der Schallfuß und Schalldruck ist auf beiden Seiten betragsmäßig der gleiche. Auf der Vorderseite wird aufgrund der unendlichen Schallwand das einfache Modell der Strahlungsimpedanz angeschlossen.

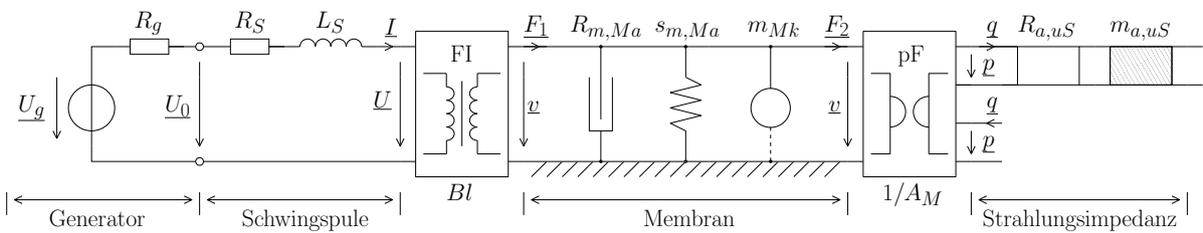


Abbildung 3.12.: Elektroakustisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand

### 3.3. Transformation des Modells ins Elektrische

Für die weiteren Berechnungen wird das elektroakustische Modell in die elektrische Domäne transformiert und anschließend möglichst weit vereinfacht. Es wäre auch möglich, das Modell in der mechanischen oder akustischen Domäne zu analysieren. Die vielen Methoden zur Vereinfachung von elektrischen Schaltungen bietet sich hier jedoch besonders an.

Im ersten Schritt werden die akustischen Elemente auf die mechanische Seite transformiert. Da die Potentialgröße im Akustischen proportional zur Flussgröße im Mechanischen ist, wird die Serienschaltung zu einer Parallelschaltung. Mit der Gleichung (2.43) werden die akustischen Elemente jeweils ins mechanische transformiert. Daraus ergibt sich das elektromechanische Modell in Abbildung 3.13.

$$R_{m,uS} = A_M^2 \cdot R_{a,uS} \quad (3.53)$$

$$m_{m,uS} = A_M^2 \cdot m_{a,uS} \quad (3.54)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

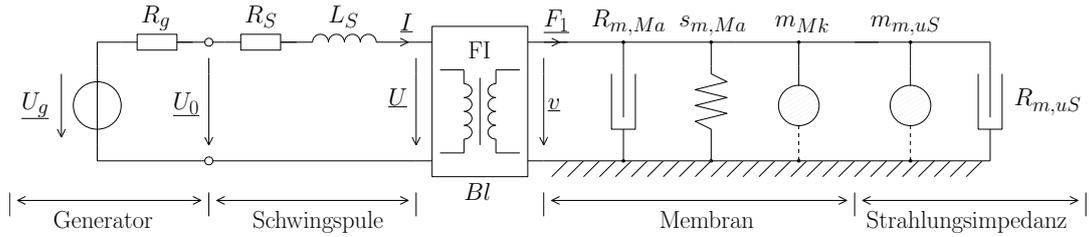


Abbildung 3.13.: Elektromechanisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Die mechanischen Elemente werden nun in die elektrische Domäne transformiert. Dazu werden die Eigenschaften des elektromechanischen Wandlers genutzt. Bei der Transformation bleibt die Struktur des Netzwerkes erhalten und die Elemente werden jeweils mit der Gleichung (2.39) folgendermaßen umgerechnet. Das ganze elektrische Modell ist in Abbildung 3.14 zu sehen.

$$R_{e,Ma} = \frac{B^2 l^2}{R_{m,Ma}} \quad (3.55) \quad L_{se,Ma} = \frac{B^2 l^2}{s_{m,Ma}} \quad (3.56) \quad C_{me,Mk} = \frac{m_{Mk}}{B^2 l^2} \quad (3.57)$$

$$C_{me,uS} = \frac{m_{m,uS}}{B^2 l^2} = \frac{A_M^2 m_{a,uS}}{B^2 l^2} \quad (3.58) \quad R_{e,uS} = \frac{B^2 l^2}{R_{m,uS}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{a,uS}} \quad (3.59)$$

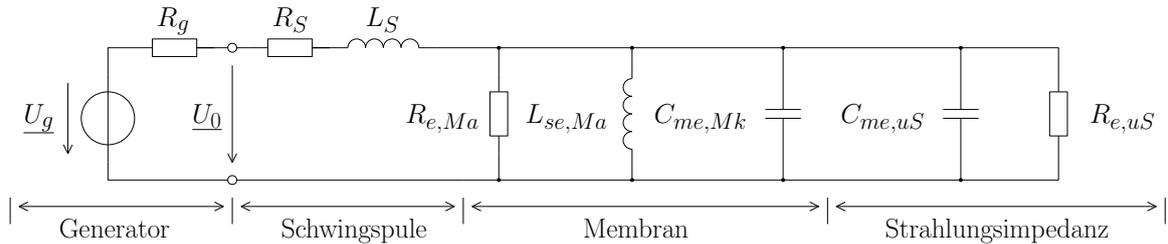


Abbildung 3.14.: Elektrisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand

### 3.4. Vereinfachung des elektrischen Modells

Für die einfacheren Berechnungen des Lautsprechers in der unendlichen Schallwand kann das elektrische Modell aus Abbildung 3.14 weiter vereinfacht werden. Bei der Vereinfachung wird nach Small [4] vorgegangen.

Das Elektroakustische Modell ist nur für tiefe Frequenzen  $kr_M < 1/2$  gültig. In den meisten Fällen von realen Lautsprecherchassis ist die Induktivität  $L_S$  aufgrund des Aufbaus eher klein und wirkt erst bei höheren Frequenzen. Sie kann deshalb vernachlässigt werden.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Der Realteil der Strahlungsimpedanz (3.47) ist mit  $\omega^2$  stark frequenzabhängig. Für die Berechnung wäre es sehr praktisch, wenn alle Elemente des Modells als frequenzunabhängig angenommen werden können. Der akustische Reibwiderstand der Strahlungsimpedanz ist im Vergleich zum mechanischen Reibungswiderstand im Normalfall sehr klein und kann praktischerweise vernachlässigt werden.

Die beiden Kapazitäten im elektrischen Modell können noch zusammengefasst werden und ergeben dann das vereinfachte Ersatzschaltbild in Abbildung 3.15.

$$C_{meg,uS} = C_{me,Mk} + C_{me,uS} = \frac{m_{Mk} + A_M^2 m_{a,uS}}{B^2 l^2} \quad (3.60)$$

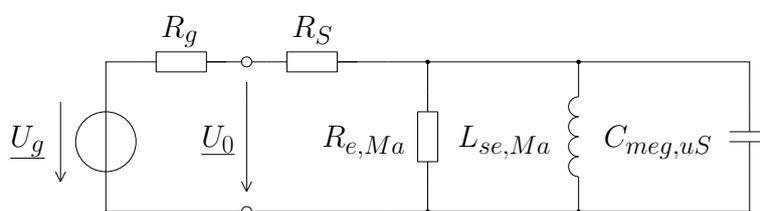


Abbildung 3.15.: Vereinfachtes elektrisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand

## 3.5. Thiele-Small Parameter

Die Thiele-Small Parameter wurden von Thiele [2, 3] zur einfacheren Berechnung von Lautsprechern vorgestellt und von Small [4] kurze Zeit danach erweitert.

Die Parameter  $R_S$ ,  $f_{uS}$ ,  $Q_{m, Mk}$ ,  $Q_{e, Mk}$ ,  $A_M$  und  $V_{\ddot{a}, Ma}$  beschreiben den Lautsprecher in der unendlichen Schallwand für tiefe Frequenzen vollständig. Sie können direkt aus dem elektrischen Impedanzverlauf bestimmt werden und beinhalten alle Bauteilwerte des vereinfachten elektrischen Modells. Die Messung und Berechnung erfolgt dabei nach Small in »Direct Radiator Loudspeaker System Analysis« [4].

Heutzutage werden die gemessenen Thiele-Small Parameter vom Hersteller bei den meisten Lautsprecherchassis angegeben.

### Parallelschwingkreis

Für die weiteren Berechnungen sind die Eigenschaften des Parallelschwingkreises praktisch. Aus diesem Grund werden sie nun für den Schwingkreis in Abbildung 3.16 genauer untersucht.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

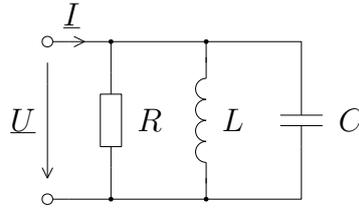


Abbildung 3.16.: Parallelschwingkreis

$$\underline{Y}_{ges} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (3.61)$$

Die Admittanz  $\underline{Y}_{ges}$  wurde direkt aus der Schaltung abgelesen. Wird der Imaginärteil  $\text{Im}\{\underline{Y}_{ges}\} = 0$  gesetzt, erhält man die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{res}$ .

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 LC = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.62)$$

Die Gleichung (3.62) auf C umgeformt und in die gesamte Admittanz (3.61) eingesetzt, ergibt folgendes.

$$\underline{Y}_{ges} = G + j\left(\frac{\omega}{\omega_{res}^2 L} - \frac{1}{\omega L}\right) = G \left[ 1 + j \underbrace{\frac{1}{\omega_{res} L G}}_Q \left( \frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega} \right) \right] \quad (3.63)$$

Die Güte  $Q$  ist als Verhältnis von Blindleitwert  $B$  zum Wirkleitwert  $G$  festgelegt. Mit (3.62) ergeben sich folgende Darstellungsmöglichkeiten dafür.

$$Q = \frac{B}{G} = \frac{1}{\omega_{res} L G} = \frac{\omega_{res} C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (3.64)$$

Mit der Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{res}$ , der Güte  $Q$  und dem Wirkleitwert  $G$  kann der Schwingkreis somit komplett beschrieben werden.

#### Zusammenhang mit den Parametern des Modells

Der Widerstand  $R_S$  ist der einzige Thiele-Small Parameter, der direkt im Modell enthalten ist. Die Resonanzfrequenz  $f_{uS}$  wird aus (3.62) mit  $\omega = 2\pi f$  berechnet. Die Gleichung wurde anschließend auf die Elemente des elektroakustischen Modells umgerechnet.

$$\omega_{uS} = \frac{1}{\sqrt{L_{se, Ma} C_{meg, uS}}} = \sqrt{\frac{s_{m, Ma}}{m_{Mk} + A_M^2 m_{a, uS}}} \quad (3.65)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

$$f_{uS} = \frac{\omega_{uS}}{2\pi} \quad (3.66)$$

Für die nächsten beiden Parameter  $Q_{m,Mk}$  und  $Q_{e,Mk}$  muss das vereinfachte elektrische Modell bei der Resonanzfrequenz  $f_{uS}$  speziell betrachtet werden.

Da nur die Parameter des Lautsprechers beschrieben werden sollen, wird der Ausgangswiderstand des Verstärkers  $R_g = 0$  gesetzt. Bei der Resonanzfrequenz regt die Spannungsquelle  $U_g$  den Energieaustausch zwischen der Spule und der Kapazität des Parallelschwingkreises an und kann für die Betrachtung der Eigenschwingung des Schwingkreises kurzgeschlossen werden. Die beschriebene Schaltung ist in Abbildung 3.17 dargestellt.

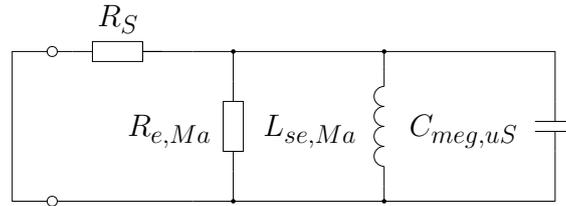


Abbildung 3.17.: Vereinfachte Schaltung bei der Resonanzfrequenz

Der Widerstand  $R_S$  liegt am gleichen Spannungspotential wie der Parallelschwingkreis. Es entsteht eine Parallelschaltung von allen Bauteilen in der Schaltung.

Die Güte des Parallelschwingkreises nur mit dem mechanischen Reibungswiderstand  $R_{e, Ma}$  kann bei  $f_{uS}$  mit (3.64) folgendermaßen geschrieben werden.

$$Q_{m, Mk} = R_{e, Ma} \sqrt{\frac{C_{meg, uS}}{L_{se, Ma}}} = \frac{1}{R_{m, Ma}} \sqrt{s_{m, Ma} (m_{Mk} + A_M^2 m_{a, uS})} \quad (3.67)$$

Die Güte, bei der nur der Widerstand der Schwingspule  $R_S$  betrachtet wird, kann ebenfalls bei  $f_{uS}$  berechnet werden.

$$Q_{e, Mk} = R_S \sqrt{\frac{C_{meg, uS}}{L_{se, Ma}}} = \frac{R_S}{B^2 l^2} \sqrt{s_{m, Ma} (m_{Mk} + A_M^2 m_{a, uS})} \quad (3.68)$$

Die Aufteilung in die zwei Güten  $Q_{m, Mk}$  und  $Q_{e, Mk}$  vereinfacht die Messung und Berechnung der Modellparameter. In der Literatur werden sie gerne mechanische und elektrische Güte genannt. Diese Benennung kann jedoch irreführend für mechanische und elektrische Schwingkreise oder für Betrachtungen in den beiden Domänen verstanden werden. Aus diesem Grund wird hier die ursprüngliche Bezeichnung von Small [4] beibehalten.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Die gesamte Güte des Lautsprechers bei  $f_{uS}$  wird mit beiden Widerständen als Parallelschaltung berechnet und kann auf den folgenden Zusammenhang umgeformt werden. Aus dem Ergebnis erkennt man, dass unterschiedliche Gütewerte wie Widerstände parallel geschaltet werden.

$$Q_{g,Mk} = \frac{R_S \cdot R_{e,Ma}}{R_S + R_{e,Ma}} \sqrt{\frac{C_{meg,uS}}{L_{se,Ma}}} = \frac{Q_{m,Mk} \cdot Q_{e,Mk}}{Q_{m,Mk} + Q_{e,Mk}} \quad (3.69)$$

Der nächste Parameter  $A_M$  ist die akustisch wirksame Fläche der Lautsprechermembran. Sie steckt als Wandlerkonstante im mechanoakustischen Wandler des Modells und somit auch in den umgewandelten akustischen Elementen.

Das äquivalente Nachgiebigkeitsvolumen der Membranaufhängung  $V_{\ddot{a},Ma}$  ist der letzte Thiele-Small Parameter. Er gibt an, wie groß ein Luftvolumen sein muss, um akustisch gleich wie die mechanische Steifigkeit der Membranaufhängung zu wirken. Die Messung erfolgt durch das Einbauen in ein geschlossenes Gehäuse mit bekanntem Luftvolumen und der damit verbundenen Änderung der Resonanzfrequenz. Für die Vergleichbarkeit ist das Volumen ebenfalls praktischer verwendbar. Mit (2.28) und (2.43) ergibt sich folgender Zusammenhang.

$$V_{\ddot{a},Ma} = \frac{\rho_0 c^2 A_M^2}{s_{m,Ma}} \quad (3.70)$$

## 3.6. Elektrische Impedanz

Der Impedanzverlauf wird an den Lautsprecherklemmen frequenzabhängig gemessen. Daraus können die Thiele-Small Parameter direkt berechnet werden. In umgekehrter Richtung ist es auch möglich, die Eingangsimpedanz mit den Thiele-Small Parametern zu beschreiben.

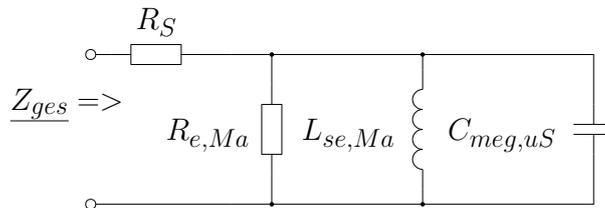


Abbildung 3.18.: Schaltung für die Bestimmung der Eingangsimpedanz

Dazu wird an den Klemmen in Abbildung 3.18 in die Schaltung des vereinfachten Modells hineingeschaut. Die gesamte Impedanz  $Z_{ges}$  ergibt sich aus der Summe des

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Widerstandes  $R_S$  und der Impedanz des Parallelschwingkreises  $Z_{par}$ . Mit der Laplace Darstellung  $s = j\omega$  kann die Admittanz aus (3.63) umgeschrieben werden.

$$\underline{Y}_{par} = \frac{1}{R_{e,Ma}} \left[ 1 + Q_{m,Mk} \left( \frac{s}{\omega_{res}} + \frac{\omega_{res}}{s} \right) \right] = \frac{1}{R_{e,Ma}} \left( 1 + Q_{m,Mk} \frac{1 + s^2 T_{uS}^2}{s T_{uS}} \right) \quad (3.71)$$

$$T_{uS} = \frac{1}{\omega_{uS}} \quad (3.72)$$

$$\underline{Z}_{ges} = R_S + \frac{1}{\underline{Y}_{par}} = R_S + \frac{R_{e,Ma}}{Q_{m,Mk}} \frac{s T_{uS}}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{m,Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \quad (3.73)$$

Das Ergebnis wurde so umgeformt, dass die Frequenzabhängigkeit im hinteren Term steckt. Davor sind nur konstante Parameter enthalten. Aus dem frequenzabhängigen Term erkennt man, dass es sich um einen Bandpass mit Mittenfrequenz  $\omega_{res}$  handelt.

### 3.7. Akustisch abgestrahlte Leistung

Es wäre sehr praktisch, wenn aus den Thiele-Small Parametern der Schalldruck in einem gewissen Abstand direkt berechnet werden könnte.

Die akustische Leistung beschreibt, wie viel Energie pro Zeit vom gesamten Lautsprecher in die Luft abgestrahlt wird. Aus dieser Leistung kann dann später für Kugelwellenabstrahlung der Schalldruck berechnet werden.

Die akustische Wirkleistung  $P_a$  berechnet sich wie auch im Elektrischen als Produkt von Fluss- und Potentialgröße. Mit dem akustischen Reibwiderstand  $R_a$  (2.18) ergibt sich folgendes.

$$\underline{P}_a = |\underline{p} \cdot \underline{q}| = |\underline{q}|^2 R_{a,uS} \quad (3.74)$$

Für diese Berechnungen wird der frequenzabhängige Strahlungswiderstand  $R_{a,uS}$  wieder benötigt. Mit dem Schallfluss, der die Abstrahlung der Membran repräsentiert, kann aus dem elektroakustischen Modell die Berechnung erfolgen. Der Schallfluss mit (2.36) gibt den proportionalen Zusammenhang zur elektrischen Spannung.

$$\underline{q} = A_M \underline{v} = \frac{A_M}{Bl} \underline{U} \quad (3.75)$$

Aus dem elektroakustischen Modell ist erkennbar, dass die gesuchte Spannung am Strahlungswiderstand die gleiche wie am Parallelschwingkreis ist. Es kann hier für die Spannung mit dem vereinfachten Modell gerechnet werden, obwohl die Strahlungsimpedanz darin vernachlässigt wird.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

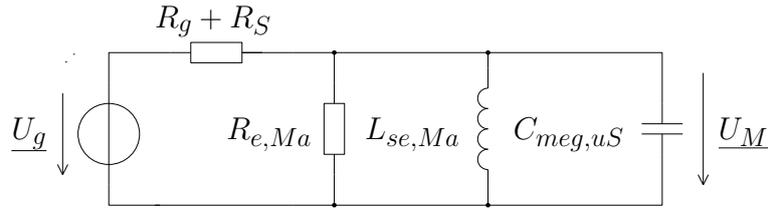


Abbildung 3.19.: Schaltung für die Bestimmung der akustischen Leistung

Das vereinfachte Modell ist in Abbildung 3.19 dargestellt, wobei der Widerstand  $R_g$  und  $R_S$  zusammengefasst sind. Mit dem Norton-Theorem kann die reale Spannungsquelle in eine Stromquelle umgewandelt werden.

$$\underline{I_g} = \frac{\underline{U_g}}{R_g + R_S} \quad (3.76)$$

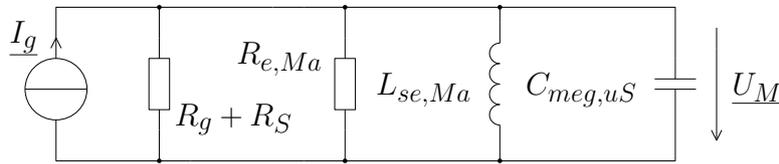


Abbildung 3.20.: Schaltung mit umgewandelter Quelle für die Bestimmung der akustischen Leistung

Durch die Umwandlung in Abbildung 3.20 entsteht eine Parallelschaltung von allen Bauteilen. Die Spannung  $U_M$  berechnet sich somit als Produkt des Quellstromes  $I_g$  und der Gesamtimpedanz  $Z_{ges}$ .

$$\underline{U_M} = \underline{Z_{ges}} \underline{I_g} \quad (3.77)$$

Mit der gesamten Güte  $Q_{g, Mk}$  und (3.63) in Laplace Darstellung wird die gesamte Impedanz  $Z_{ges}$  für  $R_g = 0$  folgendermaßen angeschrieben.

$$R_{ges} = \frac{R_S \cdot R_{e, Ma}}{R_S + R_{e, Ma}} \quad (3.78)$$

$$\underline{Z_{ges}} = \frac{R_{ges}}{1 + Q_{g, Mk} \frac{1 + s^2 T_{uS}^2}{s T_{uS}}} = \frac{R_{ges}}{Q_{g, Mk}} \frac{s T_{uS}}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{g, Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \quad (3.79)$$

Der Schallfluss  $q_M$  der Membran mit (3.75), (3.76) und (3.77) ergibt sich nun daraus.

$$\underline{q_M} = \frac{A_M}{Bl} \underline{Z_{ges}} \underline{I_g} = \frac{A_M}{Bl} \frac{\underline{U_g}}{R_g + R_S} \frac{R_{ges}}{Q_{g, Mk}} \frac{s T_{uS}}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{g, Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \quad (3.80)$$

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Mit dem Schallfluss und dem Wirkwiderstand der Strahlungsimpedanz folgt mit (3.74) daraus die akustisch abgestrahlte Leistung  $P_a$ .

$$\underline{P}_a = \left| \frac{A_M}{Bl} \frac{U_g}{R_g + R_S} \frac{R_{ges}}{Q_{g,Mk}} \frac{sT_{uS}}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{g,Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \right|^2 \frac{\rho_0}{2\pi c} \omega^2 \quad (3.81)$$

Die Gleichung soll nun für die bessere Interpretierbarkeit in frequenzabhängige und konstante Anteile aufgeteilt werden. Es wäre praktisch, wenn das  $\omega^2$  der Strahlungsimpedanz mit einem frequenzabhängigen Teil des Schallflusses weggekürzt werden könnte. Durch die Erweiterung mit  $sT_{uS}$  ergibt sich eine zusätzliche Frequenzabhängigkeit im Nenner, die aufgrund des Absolutbetrages mit  $\omega^2$  kürzbar ist. Mit (3.64) lässt sich die Gleichung weiter vereinfachen. Im letzten Schritt wurden die Elemente ins elektroakustische Modell umgerechnet.

$$\underline{P}_a = \frac{A_M^2}{B^2 l^2} \frac{U_g^2}{(R_g + R_S)^2} \frac{R_{ges}^2}{Q_{g,Mk}^2} \left| \frac{1}{sT_{uS}} \right|^2 \left| \frac{s^2 T_{uS}^2}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{g,Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \right|^2 \frac{\rho_0}{2\pi c} \omega^2$$

$$\underline{P}_a = \frac{\rho_0}{2\pi c} \frac{U_g^2}{(R_g + R_S)^2} \frac{A_M^2}{B^2 l^2} \frac{1}{C_{meg,uS}^2} \underbrace{\left| \frac{s^2 T_{uS}^2}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{g,Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \right|^2}_{\underline{G}(s)} \quad (3.82)$$

$$\underline{P}_a = \frac{U_g^2}{2\pi c} \frac{\rho_0}{(R_g + R_S)^2} \frac{B^2 l^2 A_M^2}{m_{g,uS}^2} |\underline{G}(s)|^2 \quad (3.83)$$

Die akustische Leistung ist quadratisch abhängig von der Quellspannung und deren Ausgangswiderstand, den Konstanten des elektroakustischen Modells und dem frequenzabhängigen Term  $G(s)$ . Aus dem frequenzabhängigen Term erkennt man, dass es sich um einen Hochpass 2. Ordnung mit  $\omega_{uS}$  Grenzfrequenz handelt.

Wie kommt hier der lineare Übertragungsbereich zustande?

Zur Analyse des linearen Bereichs werden die frequenzabhängigen Teile der einzelnen Gleichungen betrachtet. Die Strahlungsimpedanz ist etwa bis  $kr_M < 1$  mit  $\omega^2$  frequenzabhängig, ab  $kr_M > 1$  ist sie dann konstant.

$$R_{a,uS} = \begin{cases} \propto \omega^2 & kr_M < 1 \\ konst. & kr_M > 1 \end{cases} \quad (3.84)$$

Der Schallfluss ist proportional zur Spannung  $U_M$  und somit auch zur gesamten Impedanz  $Z_{ges}$ . Der frequenzabhängige Teil der gesamten Impedanz hat aufgrund

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

des Parallelschwingkreises Bandpassverhalten, wobei die beiden Grenzfrequenzen bei  $\omega_{uS}$  liegen.

$$\underline{Z}_{ges} = \begin{cases} \propto \omega & \omega < \omega_{uS} \\ \propto \frac{1}{\omega} & \omega > \omega_{uS} \end{cases} \quad (3.85)$$

Die akustisch abgestrahlte Leistung ergibt sich aus dem quadratischen Schallfluss, beziehungsweise der gesamten quadratischen Impedanz multipliziert mit der Strahlungsimpedanz.

$$\underline{P}_a = |\underline{q}|^2 R_{a,uS} = \begin{cases} \propto \omega^4 & \omega < \omega_{uS} \\ konst. & \omega_{uS} < \omega < kr_M \\ \propto \frac{1}{\omega^2} & \omega > kr_M \end{cases} \quad (3.86)$$

In logarithmischer Darstellung addieren sich die beiden Kurven zusammen und bei Tiefabstimmung des Schwingkreises  $\omega_{uS} < kr_M$  entsteht ein linearer Bereich zwischen  $\omega_{uS}$  und  $kr_M$ . Je größer der lineare Übertragungsbereich ist, desto geringer wird die akustische abgestrahlte Leistung des Lautsprechers. Das beschriebene Verhalten ist in Abbildung 3.21 schematisch dargestellt.

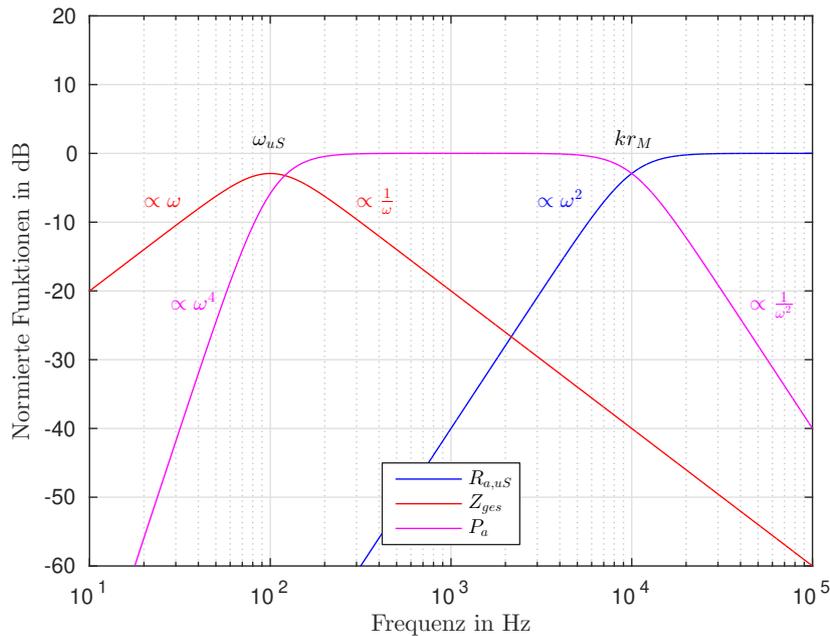


Abbildung 3.21.: Schematische Darstellung der akustischen Leistung

Die akustische Leistung kann in logarithmischer Form mit der Bezugsschalleistung  $P_0 = 1 \text{ pW}$  in dB als Leistungspegel  $L_{Pa}$  beschrieben werden.

$$L_{Pa} = 10 \log \left( \frac{L_{Pa}}{P_0} \right) \quad (3.87)$$

### 3.8. Schalldruckpegel

Aus der akustisch abgestrahlten Leistung kann bei bestimmter Abstrahlung der Schalldruck  $p$  im Abstand  $r$  vom Lautsprecher berechnet werden.

Das elektroakustische Modell ist nur für tiefe Frequenzen bis  $kr_M < 1/2$  gültig. In diesem Bereich strahlt der Lautsprecher kugelförmige Schallwellen ab. Beim Lautsprecher in der unendlichen Schallwand strahlt die Kolbenmembran nur in eine Halbebene des Raumes ab. In der Praxis ist das jedoch selten der Fall, deshalb wird für die weitere Berechnung von kugelförmiger Abstrahlung in alle Richtungen ausgegangen.

Die Schallintensität  $I_a$  ist das Produkt von Druck und Schnelle im Schallfeld. Sie kann auch mit (3.74) und (2.17) als Schalleistung pro durchströmte Fläche definiert werden. Mit der Schallkennimpedanz  $Z_0$  ist sie im Fernfeld ebenfalls beschreibbar.

$$\underline{I}_a = \underline{p} \cdot \underline{v} = \frac{P_a}{A} \quad (3.88)$$

$$\underline{I}_a = \frac{p^2}{Z_0} = \frac{p^2}{\rho_0 c} \quad (3.89)$$

Aus diesem Zusammenhang wird der Schalldruck durch eine Fläche  $A$  berechnet. Mit der Gleichung  $A = 4\pi r^2$  für die Kugeloberfläche lässt sich der Schalldruck im Abstand  $r$  folgendermaßen berechnen.

$$\underline{p} = \sqrt{\frac{\rho_0 c P_a}{4\pi r^2}} = \underline{U}_g \frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi} r} \frac{Bl A_M}{(R_g + R_S) m_{g,uS}} |\underline{G}(s)| \quad (3.90)$$

In logarithmischer Darstellung ergibt sich daraus mit dem Bezugsschalldruck  $p_0 = 20 \mu Pa$  der Schalldruckpegel  $L_p$  in dB.

$$L_p = 20 \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (3.91)$$

### 3.9. Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist ebenfalls eine wichtige Größe des Lautsprechers. Sie beschreibt, wie viel elektrische Leistung  $P_e$  benötigt wird, um eine bestimmte akustische Leistung  $P_a$  abzustrahlen. Dieses Verhältnis wird oft in Prozent angegeben.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

$$\eta = \frac{P_a}{P_e} \quad (3.92)$$

Die akustische Leistung wurde schon zuvor berechnet. Für die Bestimmung des Wirkungsgrades fehlt noch die elektrische Leistung.

Bei der Berechnung der elektrischen Leistung wird die Resonanz des Parallelschwingkreises vernachlässigt und als Impedanz nur der Widerstand  $R_S$  angenommen. Die vereinfachte Schaltung ist dazu in Abbildung 3.22 zu sehen.

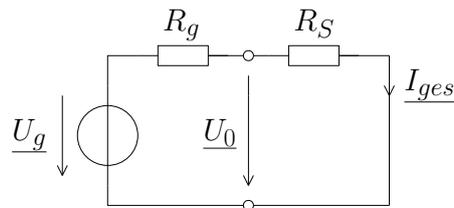


Abbildung 3.22.: Vereinfachte Schaltung für die Bestimmung der elektrischen Leistung

Die elektrische Leistung berechnet sich aus dem gesamten quadratischen Strom durch die Schaltung und dem Widerstand  $R_S$ , an dem die Leistung abfällt.

$$\underline{P}_e = \underline{I}_{ges}^2 R_S = \left( \frac{\underline{U}_g}{R_g + R_S} \right)^2 R_S \quad (3.93)$$

Der Wirkungsgrad ist somit mit der akustischen Leistung aus (3.83) gegeben. Der frequenzunabhängige Teil beschreibt den Referenzwirkungsgrad  $\eta_0$  im linearen Bereich des Lautsprechers.

$$\underline{\eta} = \underbrace{\frac{\rho_0}{2\pi c} \frac{B^2 l^2 A_M^2}{R_S m_{g,uS}^2}}_{\eta_0} |\underline{G}(s)|^2 \quad (3.94)$$

## 3.10. Membranauslenkung

Der elektrodynamische Lautsprecher besitzt aufgrund seiner Bauweise elektrische und mechanische Grenzen für seine lineare Funktionsweise.

In der Schwingspule entstehen Leitungsverluste, die zur Erwärmung des Lautsprechers führen. Ist die resultierende Temperatur zu groß, wird der Lautsprecher thermisch zerstört. Es gibt somit ein Maximum, bis zu welcher elektrischen Leistung der Lautsprecher im Normalfall verwendet werden darf.

Auf der mechanischen Seite muss die Auslenkung der Membran betrachtet werden.

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

Bei kleiner Auslenkung bewegt sich ein Großteil der Schwingspule immer im homogenen Bereich des Magnetfeldes des Permanentmagneten. Bei großer Auslenkung bewegen sich die Außenbereiche der Schwingspule aus dem linearen Bereich und es entstehen nichtlineare Verzerrungen. Zusätzlich wird das mechanische Feder-Masse System stärker ausgelenkt, was ebenfalls zu nichtlinearem Verhalten führen kann.

Small definierte erstmals in »Direct Radiator Loudspeaker System Analysis« [4] einen Grenzwert, der diese Effekte berücksichtigte. Der Grenzwert  $x_{max}$  legt die maximale Auslenkung der Membran fest, wodurch maximal 10% harmonische Verzerrungen im abgestrahlten Schalldruck auftreten dürfen. Dieser Wert wird heutzutage nach dem Vorschlag von Small von den Herstellern festgelegt und beinhaltet auch die thermischen Grenzen des Lautsprecherchassis.

Beim praktischen Lautsprecherentwurf muss sichergestellt werden, dass die Auslenkung der Membran den Grenzwert  $x_{max}$  nicht überschreitet. Die tatsächliche Membranauslenkung muss dafür für ein Lautsprecherchassis berechnet werden können. In umgekehrter Richtung ist es damit möglich, auf den maximalen erreichbaren Schalldruckpegel zurückzurechnen.

Der Schallfluss der Membran wurde in (3.80) für die Schalleistung berechnet. Durch die Division mit der Membranfläche erhält man die Schnelle der Luftteilchen an der Membranoberfläche und somit auch die Geschwindigkeit der Membran.

$$\underline{v} = \frac{q_{ges}}{A_M} \quad (3.95)$$

Die Auslenkung der Membran wird nun durch die Integration über die Zeit aus der Geschwindigkeit berechnet. Die Integration kann im Laplace Bereich folgendermaßen weiter vereinfacht werden.

$$\underline{x}(t) = \int \underline{v}(t) dt \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \underline{x}(s) = \frac{\underline{v}(s)}{s} \quad (3.96)$$

$$\underline{x}_M(s) = \frac{q_{ges}}{sA_M} = \frac{U_g}{s} \frac{Bl}{(R_g + R_s) s_{m, Ma}} \frac{1}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{g, Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \quad (3.97)$$

Die Membranauslenkung  $x_M$  kann aus dem elektroakustischen Modell direkt berechnet werden. Der frequenzabhängige Term hat das Verhalten eines Tiefpasses 2. Ordnung mit der Grenzfrequenz bei  $\omega_{uS}$ .

Mit dieser letzten Gleichung sind auch die elektrischen und mechanischen Grenzen beschrieben. Die wichtigsten Größen für den Lautsprecher in der unendlichen Schallwand können direkt aus dem elektroakustischen Modell und somit auch aus

### 3. Elektrodynamischer Lautsprecher in unendlicher Schallwand

den Thiele-Small Parametern berechnet werden. Die Klangeigenschaften des Lautsprechers sind durch den berechneten Schalldruckverlauf und die darin enthaltenen Thiele-Small Parameter für tiefe Frequenzen fix vorgegeben.

Für die praktische Verwendung als Lautsprecher in einem Raum ist der Lautsprecher in der unendlichen Schallwand aufgrund seiner Abmessungen schlecht geeignet. Das Modell der unendlichen Schallwand wird jedoch gerne zur Messung der Chassis Parameter genutzt, da für tiefe Frequenzen nur die Eigenschaften des Lautsprecherchassis gemessen werden.

## 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

Der Lautsprecher in der unendlichen Schallwand ist in der Praxis schlecht realisierbar. Der akustische Kurzschluss bei tiefen Frequenzen sollte jedoch verhindert werden. Aus diesem Grund wird das Lautsprecherchassis in ein geschlossenes luftdichtes Gehäuse eingebaut.

Durch das zusätzliche Luftvolumen im Gehäuse ändert sich das Verhalten des Lautsprechers im akustischen Bereich. Wie groß muss nun dieses Luftvolumen sein, damit der Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse möglichst gut funktioniert?

### 4.1. Funktionsweise des geschlossenen Gehäuses

Das Lautsprecherchassis wird in das luftdicht geschlossene Gehäuse eingebaut. Auf der einen Seite strahlt die Membran Schallwellen nach außen ab. Durch die Bewegung der Membran wird auf der Innenseite die Luft im Gehäuse durch das Zusammendrücken komprimiert und bei der Auslenkung in die andere Richtung entspannt. Das Luftvolumen kann als zusätzliche Steifigkeit für die Membran gesehen werden. Mit der adiabatischen Zustandsgleichung (2.24) ergibt sich daraus eine Feder im akustischen Bereich.

Zusätzlich entstehen durch die Bewegung der Luftteilchen an den Innenwänden des Gehäuses Verluste, die mit einem akustischen Reibwiderstand modelliert werden. Das akustische Modell ist dafür in Abbildung 4.1 dargestellt.

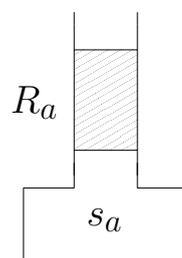


Abbildung 4.1.: Akustisches Modell für geschlossene Gehäuse

### 4.1.1. Auswirkung von Dämmmaterial im Gehäuse

Beim Bauen von Lautsprechern ist es üblich, das geschlossene Gehäuse mit Dämmmaterial zu füllen. Es werden dadurch die stehenden Wellen im Innern des Gehäuses gedämpft. Das Füllmaterial hat zusätzliche Auswirkungen auf die akustischen Elemente. Befindet sich nur Luft im Gehäuse, so kann von adiabatischer Zustandsänderung ausgegangen werden. Ist das Gehäuse jedoch stark mit Dämmmaterial gefüllt, herrscht hauptsächlich isothermer Zustand. Durch diesen Vorgang wird die Komprimierbarkeit der Luft verändert.

Das zusätzliche Füllmaterial führt zur Verringerung der akustischen Steifigkeit und zu einer damit verbundenen Vergrößerung des akustisch wirksamen Volumens. Das Äquivalenzvolumen des geschlossenen Gehäuses  $V_{\dot{a},gG}$  repräsentiert das tatsächliche akustisch wirkende Volumen. Der Anstieg des Äquivalenzvolumens zum Luftvolumen ist umgekehrt proportional zur Änderung des Adiabatenexponenten  $\kappa$ , dem Verhältnis der Wärmekapazität von Gasen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen. [5] Ohne Füllmaterial (adiabatischer Zustand) ist der Adiabatenexponent  $\kappa = 1,4$  und mit starker Füllung (isothermer Zustand) fast  $\kappa = 1$ . Mit folgender Gleichung kann die Volumensänderung durch das Füllmaterial berücksichtigt werden.

$$\frac{V_{\dot{a},gG}}{V_{gG}} \propto \frac{1}{\kappa} \quad (4.1)$$

$$\frac{V_{\dot{a},gG}}{V_{gG}} = \frac{1,4}{\kappa} \quad (4.2)$$

Durch das zusätzliche Dämmmaterial entstehen größere Reibungsverluste. Die Messung und Berücksichtigung der Verluste durch die Änderungen des Füllmaterials wird in den Papers [5, 6] von Small ausführlich behandelt.

## 4.2. Elektroakustische Modellbildung

Das elektroakustische Modell der unendlichen Schallwand kann nun mit den akustischen Elementen fürs geschlossene Gehäuse erweitert werden. In Abbildung 4.2 ist das Modell für tiefe Frequenzen  $kr_M < 1/2$  für den Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse dargestellt.

Das akustische Modell für das geschlossene Gehäuse wurde auf der Rückseite der Membran angeschlossen. Auf der Vorderseite befindet sich immer noch die Strahlungsimpedanz der unendlichen Schallwand. Durch das geschlossene Gehäuse auf der Rückseite verändert sich jedoch die Strahlungsimpedanz.

Der Realteil  $R_{a,gG}$  repräsentiert die Schallabstrahlung nach außen. Diese bleibt bis auf die zusätzliche Reibung  $R_{aV,gG}$  im Gehäuse gleich. Die akustische Masse  $m_{a,gG}$  der Strahlungsimpedanz wirkt nun nach innen und nach außen. Durch das Dämmmaterial wird die innere Masse ebenfalls verändert. Die Veränderung ist nur sehr schwierig abschätzbar. Im Normalfall kann jedoch angenommen werden, dass

#### 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

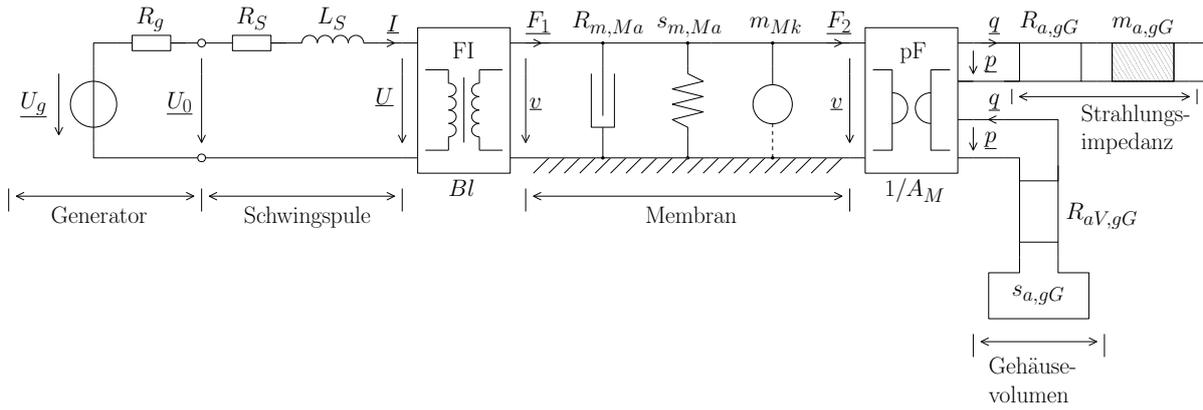


Abbildung 4.2.: Elektroakustisches Modell für den Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse

die Masse nach innen und außen in Summe fast gleich ist wie bei der unendlichen Schallwand. Sie wird aufgrund der Serienschaltung von Vorder- und Rückseite nur nach vorne eingezeichnet. Es können folgende Näherungen angenommen werden.

$$R_{a,gG} \approx R_{a,uS} \quad (4.3)$$

$$m_{a,gG} \approx m_{a,uS} \quad (4.4)$$

Die akustische Steifigkeit  $s_{a,gG}$  kann mit (2.28) aus dem Volumen berechnet werden.

$$s_{a,gG} = \frac{c^2 \rho_0}{V_{\ddot{a},gG}} \quad (4.5)$$

### 4.3. Transformation des Modelles ins Elektrische

Das elektroakustische Modell wird mit den Eigenschaften des dynamischen und mechanoakustischen Wandler ins Elektrische umgewandelt. Die Transformation erfolgt dabei gleich wie beim Lautsprecher in der unendlichen Schallwand. Das transformierte elektrische Modell ist in Abbildung 4.3 zu sehen.

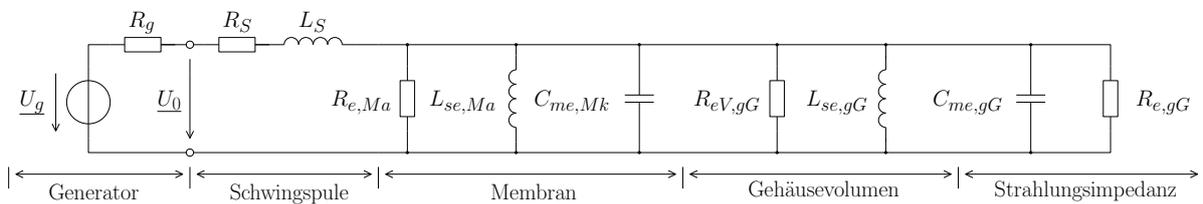


Abbildung 4.3.: Elektrisches Modell für den Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse

#### 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

$$R_{e,Ma} = \frac{B^2 l^2}{R_{m,Ma}} \quad (4.6) \quad L_{se,Ma} = \frac{B^2 l^2}{s_{m,Ma}} \quad (4.7) \quad C_{me,Mk} = \frac{m_{Mk}}{B^2 l^2} \quad (4.8)$$

$$R_{eV,gG} = \frac{B^2 l^2}{R_{mV,gG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{aV,gG}} \quad (4.9) \quad L_{se,gG} = \frac{B^2 l^2}{s_{m,gG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 s_{a,gG}} \quad (4.10)$$

$$C_{me,gG} = \frac{m_{m,gG}}{B^2 l^2} = \frac{A_M^2 m_{a,gG}}{B^2 l^2} \quad (4.11) \quad R_{e,gG} = \frac{B^2 l^2}{R_{m,gG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{a,gG}} \quad (4.12)$$

### 4.4. Vergleich mit der unendlichen Schallwand

Durch die Transformation der elektroakustischen Elemente in die elektrische Domäne kann der gesamte Lautsprecher mit allen Parametern analysiert werden. In dem folgenden Kapitel wird nun untersucht, wie das geschlossene Gehäuse im Vergleich zur unendlichen Schallwand die Eigenschaften des Lautsprechers verändert.

#### Vereinfachung des elektrischen Modells

Für den besseren Vergleich wird das Modell aus Abbildung 4.3 elektrisch weiter vereinfacht. Wie auch beim Lautsprecher in der unendlichen Schallwand kann die Induktivität  $L_S$  der Schwingspule und der Realteil der Strahlungsimpedanz  $R_{e,gG}$  vernachlässigt werden.

Die parallel geschalteten Elemente können elektrisch weiter vereinfacht werden. Es ergeben sich folgende zusammengefasste Elemente und das vereinfachte elektrische Modell in Abbildung 4.4.

$$R_{eg,gG} = \frac{R_{e,Ma} \cdot R_{eV,gG}}{R_{e,Ma} + R_{eV,gG}} = \frac{B^2 l^2}{R_{m,Ma} + A_M^2 R_{aV,gG}} \quad (4.13)$$

$$L_{seg,gG} = \frac{L_{se,Ma} \cdot L_{se,gG}}{L_{se,Ma} + L_{se,gG}} = \frac{B^2 l^2}{s_{m,Ma} + A_M^2 s_{a,gG}} \quad (4.14)$$

$$C_{meg,gG} = C_{me,Mk} + C_{me,gG} = \frac{m_{Mk} + A_M^2 m_{a,gG}}{B^2 l^2} \quad (4.15)$$

Das vereinfachte elektrische Modell im geschlossenen Gehäuse gleicht stark dem vereinfachten Modell für die unendliche Schallwand in Abbildung 3.15. Es unterscheidet

#### 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

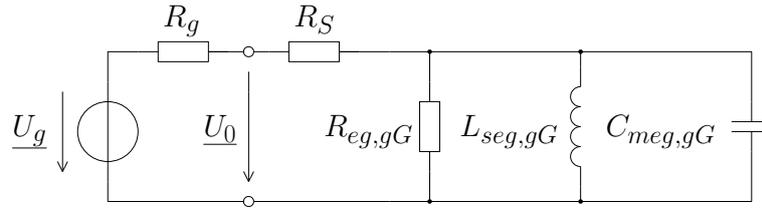


Abbildung 4.4.: Vereinfachtes elektrisches Modell für den Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse

sich lediglich darin, dass zusätzliche akustische Verluste auftreten und mit der Steifigkeit des Luftvolumens den Parallelschwingkreis beeinflusst. Es macht deshalb Sinn, nur die Änderung dieser beiden Parameter im Vergleich zur unendlichen Schallwand zu untersuchen.

#### Veränderungen des Parallelschwingkreises

Die akustischen Verluste sind im Vorhinein nicht sinnvoll bestimmbar. Sie werden im Nachhinein mit Messungen aus dem tatsächlichen Lautsprechersystem bestimmt und in der Berechnung berücksichtigt. Gegebenenfalls muss der Lautsprecher nachträglich noch angepasst werden.

Die Steifigkeit des zusätzlichen Luftvolumens kann jedoch ohne Füllmaterial berechnet und mit Füllung gut abgeschätzt werden. Zur einfacheren Vergleichbarkeit wird das Steifigkeits-/Nachgiebigkeitsverhältnis  $\alpha$  eingeführt. Es beschreibt das Verhältnis zwischen der Steifigkeit des Luftvolumens und der Steifigkeit der Membranaufhängung.

$$\alpha = \frac{s_{m,gG}}{s_{m,Ma}} = \frac{V_{\ddot{a},Ma}}{V_{\ddot{a},gG}} \quad (4.16)$$

Die Änderungen des Parallelschwingkreises durch die beiden Parameter wird nun genauer betrachtet. Dabei werden die beiden Näherungen (4.3) und (4.4) ausgenutzt.

$$\frac{\omega_{gG}}{\omega_{uS}} = \sqrt{\frac{\frac{s_{m,gG}}{m_{g,gG}}}{\frac{s_{m,Ma}}{m_{g,uS}}}} = \sqrt{\frac{s_{m,gG}}{s_{m,Ma}}} = \sqrt{\frac{s_{m,Ma} + s_{m,gG}}{s_{m,Ma}}} = \sqrt{1 + \alpha} \quad (4.17)$$

$$\frac{Q_{m,gG}}{Q_{m,uS}} = \frac{R_{m,Ma}}{R_{m,Ma} + A_M^2 R_{aV,gG}} \sqrt{1 + \alpha} \quad (4.18)$$

$$\frac{Q_{e,gG}}{Q_{e,uS}} = \sqrt{1 + \alpha} \quad (4.19)$$

#### 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

$$\frac{Q_{g,gG}}{Q_{g,uS}} = \frac{B^2 l^2 + R_S R_{m,Ma}}{B^2 l^2 + R_S (R_{m,Ma} + A_M^2 R_{aV,gG})} \sqrt{1 + \alpha} \quad (4.20)$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich die Parameter fürs geschlossene Gehäuse einfach berechnen und abschätzen, wie sich ein Lautsprecherchassis im geschlossenen Gehäuse im Vergleich zur unendlichen Schallwand verhält. Beispielsweise verschiebt sich die Resonanzfrequenz beim geschlossenen Gehäuse immer nach oben zu höheren Frequenzen.

### 4.5. Berechnung der resultierenden Größen

Da sich beim geschlossenen Gehäuse nur die Werte und nicht die Struktur des vereinfachten Modells im Vergleich zum Lautsprecher in der unendlichen Schallwand verändern, erfolgt die Berechnung für die elektrische Impedanz, sowie für die akustisch abgestrahlte Leistung und alle davon abgeleiteten Größen genau gleich. Im Folgenden sind die Gleichungen mit angepassten Werten für das geschlossene Gehäuse zusammengefasst.

$$T_{gG} = \frac{1}{\omega_{gG}} \quad (4.21)$$

$$\underline{G}(s) = \frac{s^2 T_{gG}^2}{1 + s \frac{T_{gG}}{Q_{g,gG}} + s^2 T_{gG}^2} \quad (4.22)$$

$$\underline{Z}_{ges} = R_S + \frac{R_{eg,gG}}{Q_{m,gG}} \frac{s T_{gG}}{1 + s \frac{T_{gG}}{Q_{m,gG}} + s^2 T_{gG}^2} \quad (4.23)$$

$$\underline{P}_a = \underline{U}_g^2 \frac{\rho_0}{2\pi c} \frac{B^2 l^2 A_M^2}{(R_g + R_S)^2 m_{g,gG}^2} |\underline{G}(s)|^2 \quad (4.24)$$

$$\underline{p} = \underline{U}_g \frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi} r} \frac{Bl A_M}{(R_g + R_S) m_{g,gG}} |\underline{G}(s)| \quad (4.25)$$

$$\eta = \frac{\rho_0}{2\pi c} \frac{B^2 l^2 A_M^2}{R_S m_{g,gG}^2} |\underline{G}(s)|^2 \quad (4.26)$$

$$\underline{x}_M = \underline{U}_g \frac{Bl}{(R_g + R_S) s m_{g,gG}} \frac{1}{1 + s \frac{T_{gG}}{Q_{g,gG}} + s^2 T_{gG}^2} \quad (4.27)$$

Interessanterweise ist bei den akustischen Größen, Schallleistung und Schalldruck der frequenzunabhängige Faktor mit der Näherung  $m_{a,gG} \approx m_{a,uS}$  unabhängig vom geschlossenen Gehäuse. Die klanglichen Eigenschaften stecken deshalb nur im frequenzabhängigen Term  $G(s)$ , die im nächsten Kapitel untersucht werden.

## 4.6. Klangcharakteristik und Optimierung

Zum Abschluss dieses Kapitels soll aus den gewonnenen Kenntnissen auf die Klangigenschaften des Lautsprechers eingegangen werden.

Die physikalische Größe, die vom Ohr aufgenommen wird, ist der Schalldruck in logarithmischer Form. Der Schalldruckpegel und somit auch der Schalldruck beinhalten die Klangeigenschaften der abgespielten Musik.

Betrachtet man den Schalldruck in (4.25) genauer, so erkennt man die Abhängigkeit von der Eingangsspannung, einem frequenzunabhängigen und einem frequenzabhängigen Term. Der frequenzunabhängige Term verändert nur die hörbare Lautstärke und ist für die Klangcharakteristik uninteressant. Im frequenzabhängigen Term  $G(s)$  stecken die klanglichen Eigenschaften des Lautsprechers.

$$\underline{G}(s) = \frac{s^2 T_{gG}^2}{1 + s \frac{T_{gG}}{Q_{g,gG}} + s^2 T_{gG}^2}$$

Der frequenzabhängige Term  $G(s)$  ist ein Hochpass 2. Ordnung. Für die bessere Untersuchbarkeit wird der Term mit der typischen normalisierten Filterfunktion eines Hochpasses in (4.28) verglichen. Dieser wird aus der Transformation mit  $\underline{G}_{HP}(sT_0) = \underline{G}_{TP}(1/sT_0)$  aus dem Tiefpassfilter 2. Ordnung gewonnen.

$$\underline{G}_{HP}(s) = \frac{s^2 T_0^2}{1 + a_1 s T_0 + s^2 T_0^2} \quad (4.28)$$

Vergleicht man die Koeffizienten der beiden Terme miteinander, so kommt man auf Folgendes. Die Resonanzfrequenz  $f_{gG}$  des geschlossenen Gehäuses liegt bei der normierten Grenzfrequenz  $f_0$ . Der Koeffizient  $a_1$  gibt an, wie der Frequenzgang bei der Grenzfrequenz vom Durchlassbereich in den Sperrbereich mit 40dB Abfall pro Dekade verläuft. Über diesen Koeffizienten mit (4.30) kann die Klangcharakteristik des Lautsprechers verändert und festgelegt werden. Folgendes Ergebnis ergibt sich aus dem Koeffizientenvergleich.

$$T_0 = T_{gG} \quad (4.29) \quad a_1 = \frac{1}{Q_{g,gG}} \quad (4.30)$$

#### 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

Durch die Wahl des Koeffizienten  $a_1$  wird die Klangcharakteristik vorgegeben. Die gesamte Güte  $Q_{g,gG}$  ist mit (4.30) ebenfalls festgelegt. Wie werden nun die restlichen Lautsprecherparameter daraus berechnet?

Mit einer Impedanzmessung des tatsächlichen Lautsprechers zur Berücksichtigung der Verluste wird die Güte  $Q_{m,gG}$  gemessen. Daraus kann mit (3.69) (gilt auch fürs geschlossene Gehäuse) die Güte  $Q_{e,gG}$  und weiter mit (4.19) das Steifigkeitsverhältnis  $\alpha$  berechnet werden. Mit (4.16) und (4.2) je nach Füllung wird das Gehäusevolumen berechnet. Durch die Änderung der Füllung oder des Gehäusevolumens kann nun der Lautsprecher auf die gewünschte Klangcharakteristik optimiert werden.

Wie kann der Koeffizient  $a_1$  für die Optimierung sinnvoll gewählt werden?

In der Filtertheorie wurden die Übertragungsfunktionen mit unterschiedlichen Koeffizienten im Zeit- und Frequenzbereich untersucht und optimale Werte für vorgegebene Eigenschaften gefunden. Es ist sinnvoll, die Filtertheorie für die Optimierung der Klangcharakteristik des Lautsprechers zu nutzen. Die folgenden Eigenschaften sind dafür die interessantesten. Die Koeffizienten stammen vom Small [6].

- Bessel Charakteristik wurde für den linearsten Phasengang entwickelt, die Gruppenlaufzeit ist dadurch möglichst lange konstant,  $a_1 = \sqrt{3}$ .
- Kritisch gedämpfte Charakteristik besitzt kein Überspringen bei der Sprungantwort,  $a_1 = 2$ .
- Butterworth Charakteristik wurde für einen möglichst flachen und großen Durchlassbereich des Frequenzganges optimiert,  $a_1 = \sqrt{2}$ .
- Tschebyscheff Charakteristik hat Welligkeit im Durchlassbereich, je nach Wahl des Koeffizienten  $a_1 < \sqrt{2}$  wird die Steilheit im Übergangsbereich und damit auch die Welligkeit im Durchlassbereich festgelegt.

Für die beschriebenen Filtercharakteristiken ist die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich, die Sprung- und Impulsantwort im Zeitbereich und die Gruppenlaufzeit im Anhang in Abbildung A.1 bis A.3 zum Vergleich dargestellt.

Aus den Filtereigenschaften kann auf die Klangeigenschaften geschlossen werden. Die Bessel Charakteristik hat zum Beispiel eine möglichst konstante Gruppenlaufzeit. Das bedeutet, dass alle Frequenzen gleich verzögert werden. Impulse und kurze Bässe sind dadurch sehr knackig und genau definiert.

Bei der Butterworth Charakteristik werden die Bässe eher weicher und wärmer. Zusätzlich sind tiefere Frequenzen im Durchlassbereich länger hörbar.

Bei der Tschebyscheff Charakteristik kann der Frequenzbereich noch weiter nach unten erweitert werden. Das Zeitverhalten verschlechtert sich jedoch immer mehr,

#### 4. Elektrodynamischer Lautsprecher in geschlossenem Gehäuse

was zu einem undefinierten und wummernden Bass führt.

Je nach Musikrichtung und Geschmack des Zuhörers kann somit ein anderer Wert für den Koeffizienten als optimal empfunden werden. Für die Optimierung der Klangcharakteristik sind deshalb die Filtercharakteristiken gute Richtwerte, um den Lautsprecher auf den gewünschten Klang zu bringen.

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

Der elektrodynamische Lautsprecher im Bassreflexgehäuse ist das interessanteste Lautsprechersystem dieser Arbeit. Es wurde von Thuras erfunden und 1932 vom ihm zum US Patent [7] angemeldet. Erst mehr als 40 Jahre später konnte der Lautsprecher im Bassreflexgehäuse von Small [8–11] als gesamtes System mit Verlusten beschrieben werden.

Die Idee hinter diesem Lautsprechersystem war, das Gehäuse nicht nur zur Vermeidung des akustischen Kurzschlusses zu nutzen, sondern auch als akustischen Resonator für tiefe Frequenzen. Bei der richtigen Abstimmung kann damit der lineare Bereich zu tieferen Frequenzen erweitert werden.

### 5.1. Funktionsweise des Bassreflexgehäuses

Für den akustischen Resonator wird wie im Mechanischen ein Feder-Masse-System benötigt. Wie kann dieses im Akustischen für tiefe Frequenzen realisiert werden? Durch die Komprimierung der Luft im geschlossenen Gehäuse entsteht eine akustische Feder. Wird zusätzlich eine Öffnung, die kleiner als die Membranfläche ist, in das Gehäuse gemacht, kann ein akustisch schwingfähiges System entstehen. Die Öffnung wirkt somit einerseits als akustische Masse und strahlt andererseits Schallwellen nach außen ab. Das resultierende Schallfeld bildet sich aus den abgestrahlten Schallwellen von der Membran und der Öffnung.

#### 5.1.1. Bassreflexrohr als akustische Masse

Typischerweise wird die Öffnung als zylinderförmiges Rohr ausgeführt. Es sind jedoch auch andere Öffnungsformen möglich. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, unter welchen Bedingungen die Öffnung als akustische Masse wirkt. [1, Kap. 4.2] Das Bassreflexrohr wird als zylinderförmiges Rohr mit der Länge  $l$  angenommen. Auf der einen Seite  $x = l$  befindet sich eine ideale Kolbenmembran, welche die Luftteilchen im Rohr in Schwingung versetzt. Im Rohr bilden sich Schallwellen in der Luft mit der Kennimpedanz  $Z_0$  aus. Am anderen Ende ist das Rohr offen und

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

die Wellenausbreitung findet hier im Freifeld mit  $Z_1$  statt. Durch den sprunghaften Geometriewechsel entsteht ein Impedanzsprung von  $Z_0$  auf  $Z_1$  an der Stelle  $x = 0$ . Die beschriebene Anordnung ist in Abbildung 5.1 skizziert.

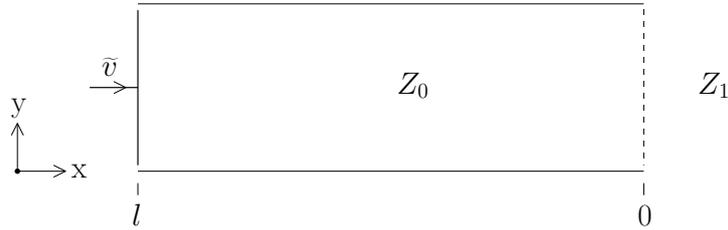


Abbildung 5.1.: Zylinderförmiges Bassreflexrohr

Bei tiefen Frequenzen kann bei kleinem Rohrdurchmesser von ebener Wellenausbreitung in x-Richtung ausgegangen werden. Bei welcher Wellenlänge ist hier die Grenze für ebene Wellenausbreitung erreicht? In y-Richtung kann erstmals bei  $d = \lambda/2$  eine Welle entstehen, da die Schnelle der Luftteilchen an den beiden Wänden null ist. Für ebene Wellenausbreitung muss deshalb der Durchmesser viel kleiner als  $\lambda/2$  sein. Mit dem Faktor 3 ist die Bedingung für ebene Wellenausbreitung (5.1) ausreichend gegeben.

$$d < \frac{1}{3} \frac{\lambda}{2} \quad (5.1)$$

Für die Betrachtung des Schallfeldes im Rohr wird von der Lösung der Wellengleichung (3.1) für ebene Wellenausbreitung in x-Richtung ausgegangen. [1, (2.46)]

$$\underline{p}(x) = \underline{p}_h e^{-jkx} + \underline{p}_r e^{jkx} \quad (5.2)$$

Mit der Euler'schen Bewegungsgleichung (3.8) kann wie in (3.9) die Schallschnelle in x-Richtung bestimmt werden.

$$\underline{v}(x) = \frac{-1}{jk\rho_0 c} \frac{\partial \underline{p}}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c} \left( \underline{p}_h e^{-jkx} - \underline{p}_r e^{jkx} \right) \quad (5.3)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $\underline{p}_h$  und  $\underline{p}_r$  müssen folgende Randbedingungen festgelegt werden. Die Schnelle der Luftteilchen an der Membranoberfläche an der Stelle  $x = l$  ist gleich wie die Geschwindigkeit der Membran. Zusätzlich ist die Impedanz an der Stelle  $x = 0$  die Schallfeldimpedanz  $Z_1$  im Freifeld.

$$\underline{v}(l) = \underline{v}_0 \quad (5.4) \quad Z(0) = \frac{\underline{p}(0)}{-\underline{v}(0)} = Z_1 \quad (5.5)$$

Die Randbedingungen können mit (5.2) und (5.3) weiter umgeschrieben werden.

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

$$\underline{v}(l) = \frac{1}{\rho_0 c} \left( \underline{p}_h e^{-jkl} - \underline{p}_r e^{jkl} \right) = \underline{v}_0 \quad Z(0) = \rho_0 c \frac{\underline{p}_h + \underline{p}_r}{\underline{p}_h - \underline{p}_r} = Z_1$$

Die Gleichung für  $v(l)$  auf  $p_h$  oder  $p_r$  umgeformt und in  $Z(0)$  eingesetzt, ergibt die beiden Koeffizienten für die hin- und rücklaufende Welle. Zur weiteren Vereinfachung wird die exponentielle komplexe Darstellung für den Sinus (5.6) und Cosinus (5.7) verwendet.

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (5.6) \quad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (5.7)$$

$$\underline{p}_h = \frac{\rho_0 c \underline{v}_0 (\rho_0 c - Z_1)}{2 (\rho_0 c \cos(kl) + jZ_1 \sin(kl))} \quad (5.8)$$

$$\underline{p}_r = \frac{-\rho_0 c \underline{v}_0 (\rho_0 c + Z_1)}{2 (\rho_0 c \cos(kl) + jZ_1 \sin(kl))} \quad (5.9)$$

Die beiden Koeffizienten in die Gleichungen (5.2) und (5.3) eingesetzt, ergeben die Schallfeldgrößen im Rohr. Die spezifische Impedanz  $Z_S$  wird ebenfalls berechnet.

$$\underline{p}(x) = -\rho_0 c \underline{v}_0 \frac{Z_1 \cos(kx) + j\rho_0 c \sin(kx)}{\rho_0 c \cos(kl) + jZ_1 \sin(kl)} \quad (5.10)$$

$$\underline{v}(x) = \underline{v}_0 \frac{\rho_0 c \cos(kx) + jZ_1 \sin(kx)}{\rho_0 c \cos(kl) + jZ_1 \sin(kl)} \quad (5.11)$$

$$\underline{Z}_S(x) = \frac{\underline{p}(x)}{-\underline{v}(x)} = \rho_0 c \frac{\frac{Z_1}{\rho_0 c} + j \tan(kx)}{1 + j \frac{Z_1}{\rho_0 c} \tan(kx)} \quad (5.12)$$

Die spezifische Impedanz  $Z_S$  ist aufgrund der Schallschnelle keine akustische Impedanz. Sie kann durch die Multiplikation mit der Rohrfläche in den Schallfluss umgewandelt werden und ergibt folgende akustische Impedanz  $Z_a$ .

$$\underline{Z}_a(x) = \frac{\underline{Z}_S(x)}{A} = \frac{\rho_0 c}{A} \frac{\frac{Z_1}{\rho_0 c} + j \tan(kl)}{1 + j \frac{Z_1}{\rho_0 c} \tan(kl)} \quad (5.13)$$

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

Beim Bassreflexrohr erfolgt der Übergang am Ende des Rohres in den freien Raum. Der Schalldruck wird unter Vernachlässigung der Strahlungsimpedanz  $p(0) = 0$ . Die resultierende Impedanz  $Z(0) = Z_1$  ist deshalb ebenfalls Null. Am anderen Ende wird nun an der Stelle  $x = l$  die Eingangsimpedanz des Rohres betrachtet. Die akustische Impedanz (5.13) vereinfacht sich weiter auf Folgendes.

$$\underline{Z}_a(l) = j \frac{\rho_0 c}{A} \tan(kl) \quad (5.14)$$

Bei kleinen Werten kann der Tangens durch das erste Glied seiner Reihenentwicklung (5.15) angenähert werden. Für Werte  $x < 1/2$  ist die Abweichung der Näherung  $\tan(x) \approx x$  etwa 9%. Daraus ergibt sich mit (2.15), (3.4) und (3.5) bei 9,3% absolutem Fehler die Bedingung (5.16) für die maximale Rohrlänge. Die Rohrlänge muss also um den Faktor 6 größer sein, als die halbe Wellenlänge, damit sich eine Welle im Rohr ausbreiten kann.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7) \quad (5.15)$$

$$l < \frac{1}{6} \frac{\lambda}{2} \quad (5.16)$$

$$\underline{Z}_a \approx j \frac{\rho_0 c}{A} kl = j\omega \frac{\rho_0 l}{A} = j\omega m_a \quad (5.17)$$

Mit der Näherung  $\tan(kl) \approx kl$  und (3.5) vereinfacht sich die Impedanz  $Z_a$  weiter. Aus dem Vergleich der akustischen Masse (2.22) mit dem Ergebnis (5.17) erkennt man den Zusammenhang der beiden. Bei tiefen Frequenzen und kurzer Rohrlänge schwingt die Luftmasse im Rohr als Ganzes hin und her und bildet mit der Luftsteifigkeit im Gehäuse den gewünschten akustischen Resonator.

### 5.1.2. Strahlungsimpedanz des Bassreflexrohres

Bei der bisherigen Betrachtung des Bassreflexrohres wurde die Strahlungsimpedanz an den Enden vernachlässigt. Für das zylindrische Bassreflexrohr kann das Modell der Kolbenmembran für die Beschreibung der Strahlungsimpedanz verwendet werden. Die kreisförmige Fläche der Kolbenmembran wird hier durch die Fläche am Ende des hin und her schwingenden Luftpuffens gebildet. Das akustische Modell aus Abbildung 3.8 mit (3.47) und (3.48) ist deshalb ebenfalls gültig.

Die Masse der Strahlungsimpedanz wird typischerweise zur akustischen Masse des Bassreflexrohres als Endkorrektur dazugerechnet. Das bietet den Vorteil, dass die Strahlungsimpedanz einfach mitberechnet werden kann. Bei vielen Bassreflexrohren werden die Enden für bessere Strömungseigenschaften der Luft und geringere Geräusentwicklung abgerundet. Die Abrundung beeinflusst die effektive Rohrlänge

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

und die Strahlungsimpedanz und kann mit dem Faktor einfach berücksichtigt werden. Bei beidseitig abgerundeten Rohren muss die Endkorrektur  $\Delta l$  doppelt zur tatsächlichen Länge des Bassreflexrohres dazuaddiert werden.

$$\text{einseitig: } l_{g,Br} = l_{Br} + \Delta l \quad \text{beidseitig: } l_{g,Br} = l_{Br} + 2\Delta l \quad (5.18)$$

Aus (2.22) und (3.48) kann der Endkorrekturfaktor  $k_l$  für das Bassreflex Rohr ohne Abrundung folgendermaßen berechnet werden. Für Abrundungen und andere Geometrien ändert sich natürlich dieser Faktor.

$$\Delta l = \frac{A_{Br} m_a}{\rho_0} = \frac{8}{3\pi} r_{Br} = k_l r_{Br} \quad (5.19)$$

### 5.2. Elektroakustische Modellbildung

Für die elektroakustische Modellbildung kann vom Modell für die unendliche Schallwand ausgegangen werden. Auf der Rückseite der Membran wird zusätzlich das Gehäuse mit dem Bassreflexrohr als Modell angebracht. In Abbildung 5.2 ist das ganze Modell für tiefe Frequenzen  $kr_M < 1/2$  zu sehen.

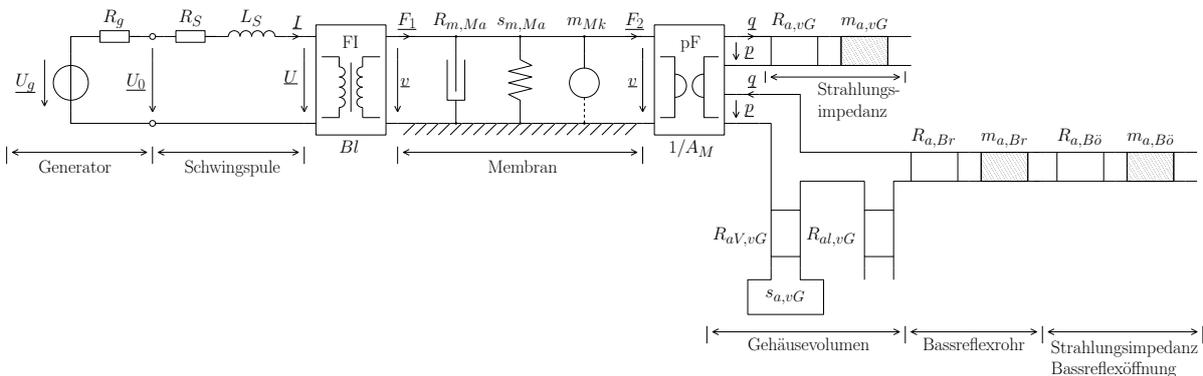


Abbildung 5.2.: Elektroakustisches Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse

Das Gehäuse ist wie beim Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse durch eine akustische Feder  $s_{a,vG}$  der Luftsteifigkeit und einen Reibungswiderstand  $R_{aV,vG}$  für die Verluste modelliert. Parallel dazu ist ein zusätzlicher Reibungswiderstand  $R_{al,vG}$  für die Leckverluste geschaltet. Small fand durch das Bauen vieler Testgehäuse heraus, dass die Lautsprecher fast nie ganz luftdicht waren, obwohl er die Gehäuse luftdicht gebaut hatte. Er zog daraus den Schluss, dass die Lautsprecherchassis in den seltensten Fällen komplett luftdicht sind. Diese Leckverluste verfälschten seine Ergebnisse bei der Optimierung der Klangeigenschaften. Da Small sie nicht beseitigen konnte,

berücksichtigte er sie im Modell als akustischen Reibungswiderstand. [8]

Ebenfalls parallel dazu ist das Bassreflexrohr mit seiner Strahlungsimpedanz aus  $R_{a,B\ddot{o}}$  und  $m_{a,B\ddot{o}}$  angebracht. Im Bassreflexrohr entstehen zur akustischen schwingenden Luftmasse  $m_{a,Br}$  noch kleine Reibungsverluste an der Rohrwand, die als Reibungswiderstand  $R_{a,Br}$  im Modell dargestellt werden.

Da der Bassreflexlautsprecher üblicherweise nur leicht mit Dämmmaterial gefüllt wird, kann die Volumenvergrößerung vernachlässigt werden. Die Strahlungsimpedanz an der Rückseite der Membran bleibt dadurch ebenfalls unbeeinflusst. Die Strahlungsimpedanz ist deshalb gleich wie bei der unendlichen Schallwand.

$$R_{a,vG} = R_{a,uS} \quad (5.20)$$

$$m_{a,vG} = m_{a,uS} \quad (5.21)$$

### 5.3. Transformation des Modelles ins Elektrische

Mit den Eigenschaften des dynamischen- und mechanoakustischen Wandler wird auch hier das Modell ins Elektrische umgewandelt. Das elektrische Modell ist in Abbildung 5.3 zu sehen.

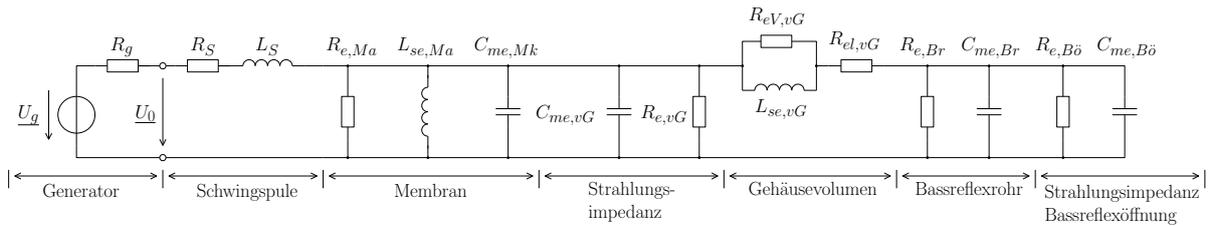


Abbildung 5.3.: Elektrisches Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse

$$R_{e, Ma} = \frac{B^2 l^2}{R_{m, Ma}} \quad (5.22) \quad L_{se, Ma} = \frac{B^2 l^2}{s_{m, Ma}} \quad (5.23) \quad C_{me, Mk} = \frac{m_{Mk}}{B^2 l^2} \quad (5.24)$$

$$R_{e, vG} = \frac{B^2 l^2}{R_{m, vG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{a, vG}} \quad (5.25) \quad C_{me, vG} = \frac{m_{m, vG}}{B^2 l^2} = \frac{A_M^2 m_{a, vG}}{B^2 l^2} \quad (5.26)$$

$$R_{eV, vG} = \frac{B^2 l^2}{R_{mV, vG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{aV, vG}} \quad (5.27) \quad L_{se, vG} = \frac{B^2 l^2}{s_{m, vG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 s_{a, vG}} \quad (5.28)$$

$$R_{el, vG} = \frac{B^2 l^2}{R_{ml, vG}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{al, vG}} \quad (5.29)$$

$$R_{e, Br} = \frac{B^2 l^2}{R_{m, Br}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{a, Br}} \quad (5.30) \quad C_{me, Br} = \frac{m_{m, Br}}{B^2 l^2} = \frac{A_M^2 m_{a, Br}}{B^2 l^2} \quad (5.31)$$

$$R_{e,B\ddot{o}} = \frac{B^2 l^2}{R_{m,B\ddot{o}}} = \frac{B^2 l^2}{A_M^2 R_{a,B\ddot{o}}} \quad (5.32) \quad C_{me,B\ddot{o}} = \frac{m_{m,B\ddot{o}}}{B^2 l^2} = \frac{A_M^2 m_{a,B\ddot{o}}}{B^2 l^2} \quad (5.33)$$

## 5.4. Vereinfachung des elektrischen Modelles

Für die einfachere Berechnung wird das elektrische Modell wie beim Lautsprecher in unendlicher Schallwand weiter vereinfacht. Bei tiefen Frequenzen kann die Induktivität der Schwingspule vernachlässigt werden. Der frequenzabhängige Realteil der Strahlungsimpedanzen ist ebenfalls vernachlässigbar. Die parallel geschalteten Kapazitäten werden elektrisch weiter zusammengefasst und ergeben dann die Schaltung im Abbildung 5.4.

$$C_{meg,vG} = C_{me,Mk} + C_{me,vG} = \frac{m_{Mk} + A_M^2 m_{a,vG}}{B^2 l^2} \quad (5.34)$$

$$C_{meg,Br} = C_{me,Br} + C_{me,B\ddot{o}} = \frac{A_M^2 (m_{a,Br} + m_{a,B\ddot{o}})}{B^2 l^2} \quad (5.35)$$

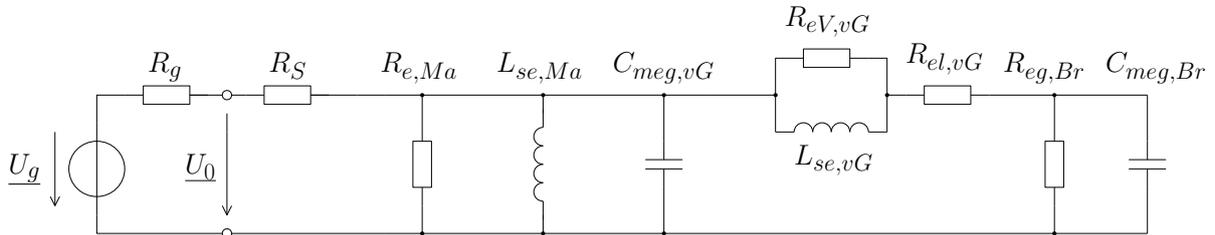


Abbildung 5.4.: Elektrisch vereinfachtes Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse

Für die weitere Vereinfachung wird nach Small [8] vorgegangen. Er fand durch das Vermessen mehrerer Bassreflexlautsprecher heraus, was die typischen Werte für die akustischen Verluste sind. Er beschreibt die Verluste mit folgenden Güten.

$$Q_{Br} = R_{eg,Br} \sqrt{\frac{C_{meg,Br}}{L_{se,vG}}} \quad (5.36)$$

$$Q_V = R_{eV,vG} \sqrt{\frac{C_{meg,Br}}{L_{se,vG}}} \quad (5.37)$$

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

$$Q_L = \frac{1}{R_{el,vG}} \sqrt{\frac{L_{se,vG}}{C_{meg,Br}}} \quad (5.38)$$

Die typischen Werte für die Verlustgüten liegen in den folgenden Größenordnungen.

- Übliche Werte für die Güte des Bassreflexrohres  $Q_{Br}$  sind im Bereich zwischen 50 – 100.
- Absorptionsverluste im ungefüllten Gehäuse ergeben Gütewerte  $Q_V$  von 100 oder größer. Bei leichter Füllung liegt die Güte zwischen 30 – 80.
- Leckverluste  $Q_L$  spielen üblicherweise die größte Rolle. Sie liegen bei gut gebauten Lautsprechern zwischen 5 – 20. Ein typischer Startwert für die Dimensionierung ist dafür  $Q_L = 7$ .

$$\frac{1}{Q_{ges}} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_V} + \frac{1}{Q_{Br}} \quad (5.39)$$

Da die Leckverlustgüte viel kleiner ist als die anderen Werte und die gesamte Güte (5.39) wie die Parallelschaltung von Widerständen (3.69) berechnet wird, können die Verluste vom Bassreflexrohr und vom Dämmmaterial vernachlässigt werden. Die Verluste können somit durch einen einfachen Reibwiderstand  $R_{egl,vG}$  für die Leckverluste modelliert werden. Das elektrische Modell vereinfacht sich weiter und ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

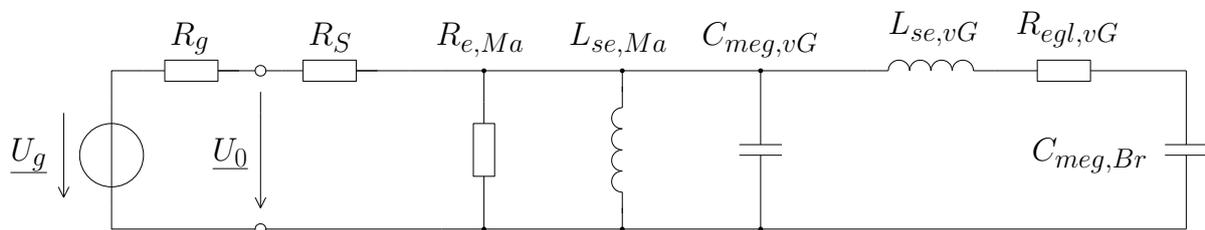


Abbildung 5.5.: Vereinfachtes Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse

### 5.5. Elektrische Impedanz

Bei der Berechnung der elektrischen Impedanz wird in Abbildung 5.5 an den Anschlussklemmen des vereinfachten Modells hineingeschaut. Es ist die Impedanz des Lautsprechers in unendlicher Schallwand und der Serienschwingkreis des akustischen Resonators zu erkennen. In Abbildung 5.6 ist die beschriebene Schaltung zur Bestimmung der Eingangsimpedanz dargestellt.

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

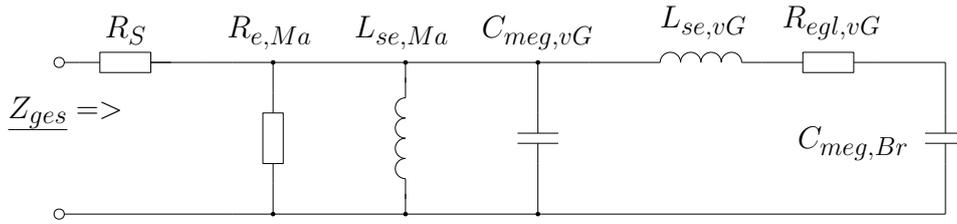


Abbildung 5.6.: Schaltung für die Bestimmung der Eingangsimpedanz mit Bassreflexgehäuse

### Serienschwingkreis

Für die Berechnung der Eingangsimpedanz muss zuerst die Impedanz des Serienschwingkreises bekannt sein. Aus diesem Grund wird der Schwingkreis in Abbildung 5.7 untersucht.

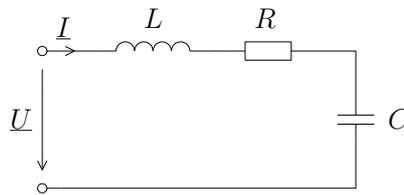


Abbildung 5.7.: Serienschwingkreis

$$\underline{Z}_{ges} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (5.40)$$

Die Impedanz  $\underline{Z}_{ges}$  wurde direkt aus der Schaltung abgelesen. Wird der Imaginärteil  $\text{Im}\{\underline{Z}_{ges}\} = 0$  gesetzt, erhält man die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{res}$ .

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.41)$$

Die Gleichung (5.41) auf  $L$  umgeformt und in (5.40) eingesetzt ergibt Folgendes.

$$\underline{Z}_{ges} = R + j \left( \frac{\omega}{\omega_{res}^2 C} - \frac{1}{\omega C} \right) = R \left[ 1 + j \underbrace{\frac{1}{\omega_{res} CR}}_Q \left( \frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega} \right) \right] \quad (5.42)$$

Mit (5.41) ergeben sich folgende Darstellungsmöglichkeiten dafür.

$$Q = \frac{X}{R} = \frac{1}{\omega_{res} CR} = \frac{\omega_{res} L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.43)$$

### Berechnung der Eingangsimpedanz

Der akustische Resonator, auch nach seinem Erfinder Helmholtz Resonator genannt, wird im vereinfachten Ersatzschaltbild durch den Serienschwingkreis modelliert. Die Helmholtz Resonanzkreisfrequenz  $\omega_H$  und die Verlustgüte  $Q_L$  ist dadurch folgendermaßen gegeben.

$$\omega_H = \frac{1}{\sqrt{L_{se,vG} C_{meg,Br}}} = \sqrt{\frac{s_{a,vG}}{m_{a,Br} + m_{a,Bö}}} \quad (5.44)$$

$$Q_L = \frac{\omega_H L_{se,vG}}{R_{egl,vG}} = R_{agl,vG} \frac{1}{\sqrt{s_{a,vG} (m_{a,Br} + m_{a,Bö})}} \quad (5.45)$$

Wie auch bei der unendlichen Schallwand in (3.71), kann die Impedanz des Serienschwingkreises mit  $T_H = \frac{1}{\omega_H}$  und  $s = j\omega$  umgeschrieben werden. Die Impedanzen der beiden Schwingkreise sind unten angegeben.

$$\underline{Z}_{ser} = R_{egl,vG} Q_L \frac{1 + s \frac{T_H}{Q_L} + s^2 T_H^2}{s T_H} \quad (5.46)$$

$$\underline{Z}_{par} = \frac{R_{e,Ma}}{Q_{m,Mk}} \frac{s T_{uS}}{1 + s \frac{T_{uS}}{Q_{m,Mk}} + s^2 T_{uS}^2} \quad (5.47)$$

Die Parallelschaltung der beiden ergibt folgende Impedanz. Mit dem Steifigkeitsverhältnis  $\alpha$  aus (4.16) wurde die Gleichung weiter vereinfacht.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_x &= \frac{\underline{Z}_{ser} \cdot \underline{Z}_{par}}{\underline{Z}_{ser} + \underline{Z}_{par}} \\ &= R_{e,Ma} \frac{s (T_{uS}/Q_{m,Mk}) (1 + s T_H/Q_L + s^2 T_H^2)}{s^4 T_H^2 T_{uS}^2 + s^3 (T_H^2 T_{uS}/Q_{m,Mk} + T_H T_{uS}^2/Q_L) + s^2 [(\alpha + 1) T_H^2 + T_H T_{uS}/Q_L Q_{m,Mk} + T_{uS}^2] + s (T_H/Q_L + T_{uS}/Q_{m,Mk}) + 1} \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\underline{Z}_{ges} = R_S + \underline{Z}_x \quad (5.49)$$

Durch die Serienschaltung mit dem Widerstand der Schwingspulen entsteht die gesamte Eingangsimpedanz des Bassreflexlautsprechers in (5.49).

## 5.6. Akustisch abgestrahlte Leistung

Der Schalldruck im gewünschten Abstand kann hier wie beim Lautsprecher in der unendlichen Schallwand indirekt über die akustisch abgestrahlte Leistung berechnet werden. Die akustische Leistung gibt an, wie viel Energie pro Zeit vom Lautsprecher in die Luft abgestrahlt wird.

Bei tiefen Frequenzen, bei welchem die Abstände zwischen Membran und Bassreflexrohr und die Gehäuseabmessungen des Lautsprechers viel kleiner als die Wellenlänge sind, kann die abgestrahlte Leistung als Summe der akustischen Leistung der Membran, des Bassreflexrohres und der Leckverluste berechnet werden. Die Berechnung der akustischen Leistung erfolgt jeweils mit (3.74) aus dem abgestrahlten quadratischen Schallfluß und dem Realteil der Strahlungsimpedanz. Da die geometrischen Abmessungen im Schallfluß und nicht im Realteil der Strahlungsimpedanz enthalten sind, kann die tatsächlich abgestrahlte Leistung aus dem gesamten quadratischen Schallfluß und dem Realteil der Strahlungsimpedanz (3.47) berechnet werden. Zusätzlich gilt, dass der Schallfluß proportional zur elektrischen Spannung in (3.75) ist. Nun stellt sich jedoch die Frage, welche Spannung im vereinfachten Modell dem abgestrahlten gesamten Schallfluß entspricht.

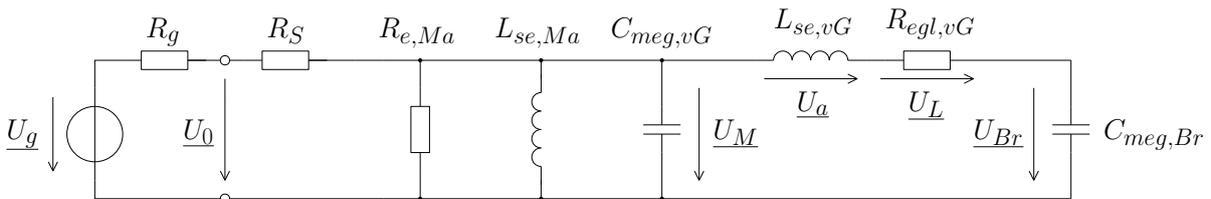


Abbildung 5.8.: Schaltung für die Bestimmung der akustischen Leistung beim Bassreflexgehäuse

Die Spannung  $U_M$  stellt im elektrischen Modell in Abbildung 5.8 den Schallfluß, der durch die Bewegung der Lautsprechermembran erzeugt wird, dar. Der Schallfluß durch das Bassreflexrohr wird mit der Spannung  $U_{Br}$  repräsentiert. Die Luft, die aufgrund der Undichtheit der Membran aus dem Gehäuse entweicht, ist durch die Spannung der Leckverluste  $U_L$  dargestellt. Mit  $U_a$  wird die Spannung an der Spule  $L_{se, vG}$  bezeichnet. Sie repräsentiert den Schallfluß, der zur Komprimierung und Entspannung der Luft im Gehäuse führt.

Mit der Kirchhoff'schen Maschenregel kann der Zusammenhang zwischen den Spannungen in (5.50) gefunden werden. Der gesamte abgestrahlte Schallfluß wird durch die Spannungen  $U_M$ ,  $U_{Br}$  und  $U_L$  dargestellt. Somit repräsentiert, unter Berücksichtigung der Maschengleichung (5.50), die Spannung  $U_a$  in (5.51) den gesamten abgestrahlten Schallfluß.

$$\underline{U}_M - \underline{U}_a - \underline{U}_L - \underline{U}_{Br} = 0 \quad (5.50)$$

$$\underline{U}_M - \underline{U}_{Br} - \underline{U}_L = \underline{U}_a \quad (5.51)$$

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

Für die weitere Berechnung des Schallflusses  $q_a$  muss zuerst die Spannung  $U_a$  aus dem vereinfachten elektrischen Modell bestimmt werden. Auch hier wird wie bei der unendlichen Schallwand zur Vereinfachung eine Quellenumwandlung vorgenommen. Das elektrische Modell mit umgewandelter Quelle ist in Abbildung 5.9 dargestellt.

$$\underline{I_g} = \frac{\underline{U_g}}{R_g + R_S} \quad (5.52)$$

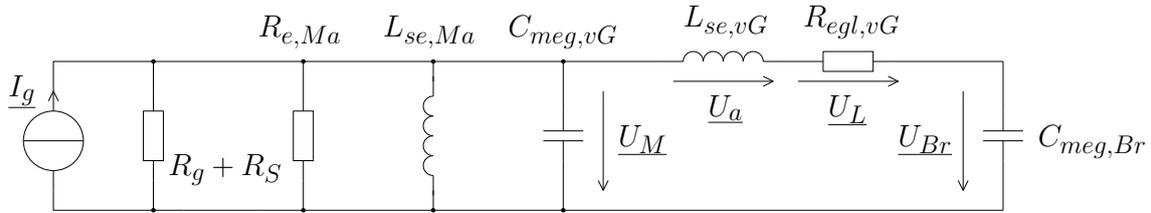


Abbildung 5.9.: Schaltung mit umgewandelter Quelle für die Bestimmung der akustischen Leistung beim Bassreflexgehäuse

Die Spannung  $U_M$  liegt an allen parallelgeschalteten Bauelementen. Sie kann deshalb aus dem Produkt aus Quellstrom  $I_g$  und der gesamten Impedanz  $Z_y$  berechnet werden.

$$\underline{U_M} = \underline{I_g} \cdot \underline{Z_y} \quad (5.53)$$

Die gesamte Impedanz wird wie in (5.48) als Parallelschaltung der Impedanz des Serien- und Parallelschwingkreises berechnet. Der Unterschied ist jedoch, dass der Widerstand aus  $R_g + R_S$  dazugerechnet werden muss. Mit der gesamten Güte  $Q_{g,vG}$  des Bassreflexlautsprechers und (3.78) mit  $R_g = 0$  wird das berücksichtigt.

$$\underline{Z_y} = R_{ges} \frac{s (T_{uS}/Q_{g,vG}) (1 + sT_H/Q_L + s^2T_H^2)}{s^4T_H^2T_{uS}^2 + s^3 (T_H^2T_{uS}/Q_{g,vG} + T_H T_{uS}^2/Q_L) + s^2 [(\alpha + 1) T_H^2 + T_H T_{uS}/Q_L Q_{g,vG} + T_{uS}^2] + s (T_H/Q_L + T_{uS}/Q_{g,vG}) + 1} \quad (5.54)$$

Die Spannung  $U_M$  führt am Serienschwingkreis zu einem Stromfluss durch die Bauelemente. Daraus kann mit der Impedanz des jeweiligen Bauelements die Spannung und weiters der akustische Schallfluss bestimmt werden.

$$\underline{I_{ser}} = \frac{\underline{U_M}}{\underline{Z_{ser}}} \quad (5.55)$$

$$\underline{U_a} = sL_{se,vG} \cdot \underline{I_{ser}} \quad (5.56)$$

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

Der akustisch abgestrahlte Schallfluss  $q_a$  berechnet sich in zusammengefasster Form folgendermaßen.

$$\underline{q}_a = \frac{A_M}{Bl} \underline{U}_a = \frac{A_M}{Bl} \frac{\underline{U}_g}{R_g + R_S} \frac{1}{s C_{meg,vG}} \underline{G}(s) \quad (5.57)$$

$$\underline{G}(s) = \frac{s^4 T_H^2 T_{uS}^2}{s^4 T_H^2 T_{uS}^2 + s^3 (T_H^2 T_{uS} / Q_{g,vG} + T_H T_{uS}^2 / Q_L) + s^2 [(\alpha + 1) T_H^2 + T_H T_{uS} / Q_L Q_{g,vG} + T_{uS}^2] + s (T_H / Q_L + T_{uS} / Q_{g,vG}) + 1} \quad (5.58)$$

Wie bei dem Lautsprecher in der unendlichen Schallwand kann daraus die abgestrahlte Leistung  $P_a$  berechnet werden. Der Realteil der Strahlungsimpedanz (3.47) ist nicht von der Geometrie abhängig und kann auch hier für  $R_{a,vG}$  verwendet werden.

$$\underline{P}_a = |\underline{q}_a|^2 R_{a,vG} = \underline{U}_g^2 \frac{\rho_0}{2\pi c} \frac{B^2 l^2 A_M^2}{(R_g + R_S)^2 m_{g,vG}^2} |\underline{G}(s)|^2 \quad (5.59)$$

Im Vergleich mit der abgestrahlten Leistung der unendlichen Schallwand (3.83) und mit (5.21) ist erkennbar, dass sich nur der frequenzabhängige Teil geändert hat. Für die weiteren Berechnungen muss deshalb nur noch die normierte Übertragungsfunktion  $G(s)$  betrachtet werden.

### 5.7. Berechnung der resultierenden Größen

Die Berechnung des Schalldruckes  $p$  in einem beliebigen Abstand zum Lautsprecher und dessen Wirkungsgrad  $\eta$  erfolgt wie beim Lautsprecher in der unendlichen Schallwand direkt aus der abgestrahlten Leistung  $P_a$ . Die beiden Größen werden mit (3.90) und (3.94) folgendermaßen berechnet.

$$\underline{p} = \underline{U}_g \frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi} r} \frac{Bl A_M}{(R_g + R_S) m_{g,vG}} |\underline{G}(s)| \quad (5.60)$$

$$\eta = \frac{\rho_0}{2\pi c} \frac{B^2 l^2 A_M^2}{R_S m_{g,vG}^2} |\underline{G}(s)|^2 \quad (5.61)$$

## 5.8. Membranauslenkung

Die Membranauslenkung berechnet sich aus der Integration der Geschwindigkeit (3.95) der Luftteilchen an der Membranoberfläche. Die Geschwindigkeit wird über den Schallfluss an der Membran bestimmt. Aus der Spannung  $U_M$  kann mit (3.75) der Schallfluss  $q_M$  und daraufhin die Membranauslenkung  $x_M$  berechnet werden.

$$\underline{x_M} = \underline{U_g} \frac{Bl}{(R_g + R_S) s_{m, Ma}} \frac{(1 + sT_H/Q_L + s^2T_H^2)}{s^4T_H^2T_{uS}^2 + s^3(T_H^2T_{uS}/Q_{g, vG} + T_H T_{uS}^2/Q_L) + s^2[(\alpha + 1)T_H^2 + T_H T_{uS}/Q_L Q_{g, vG} + T_{uS}^2] + s(T_H/Q_L + T_{uS}/Q_{g, vG}) + 1} \quad (5.62)$$

Im Vergleich zur Membranauslenkung der unendlichen Schallwand ändert sich hier ebenfalls nur der frequenzabhängige Anteil.

## 5.9. Klangcharakteristik und Optimierung

Zum Schluss soll nun wie beim geschlossenen Gehäuse auf die Klangeigenschaften des Lautsprechers eingegangen werden.

Der interessante Teil des Schalldruckes fürs Gehör ist der frequenzabhängige Term  $G(s)$ . Er ist beim Bassreflexlautsprecher ein Polynom 4. Ordnung mit folgender Form.

$$\underline{G}(s) = \frac{s^4 T_H^2 T_{uS}^2}{s^4 T_H^2 T_{uS}^2 + s^3 (T_H^2 T_{uS} / Q_{g, vG} + T_H T_{uS}^2 / Q_L) + s^2 [( \alpha + 1 ) T_H^2 + T_H T_{uS} / Q_L Q_{g, vG} + T_{uS}^2] + s (T_H / Q_L + T_{uS} / Q_{g, vG}) + 1} \quad (5.63)$$

Die normierte Übertragungsfunktion  $G(s)$  stellt ein Hochpassfilter 4. Ordnung mit 80dB Dämpfung pro Dekade dar. Zur besseren Untersuchbarkeit wird dieser Term mit der typischen normalisierten Filterfunktion des Hochpasses 4. Ordnung verglichen.

$$\underline{G_{HP}}(s) = \frac{s^4 T_0^4}{1 + a_1 s T_0 + a_2 s^2 T_0^2 + a_3 s^3 T_0^3 + s^4 T_0^4} \quad (5.64)$$

Die normierte Zeitkonstante  $T_0$  des Filters und somit auch die Grenzfrequenz  $f_0$  ist die Grenze zwischen Sperr- und Durchlassbereich. Die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  bestimmen die Form des Überganges in diesem Bereich. Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen folgt, dass  $T_0^4 = T_H^2 T_{uS}^2$  sein muss. Zur besseren Vergleichbarkeit der Resonanzfrequenzen  $f_H$  und  $f_{uS}$  wird das Abstimmungsverhältnis  $h$  eingeführt.

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

$$h = \frac{f_H}{f_{uS}} = \frac{T_{uS}}{T_H} \quad (5.65)$$

Der Koeffizientenvergleich der Gleichungen (5.63) und (5.64) ergibt mit dem Abstimmungsverhältnis (5.65) und dem Steifigkeitsverhältnis (4.16) die folgenden Zusammenhänge.

$$h = \frac{T_{uS}^2}{T_0^2} \quad (5.66)$$

$$a_1 = \frac{1}{Q_L \sqrt{h}} + \frac{\sqrt{h}}{Q_{g,vG}} \quad (5.67)$$

$$a_2 = \frac{1}{Q_L Q_{g,vG}} + \frac{1 + \alpha + h^2}{h} \quad (5.68)$$

$$a_3 = \frac{1}{Q_{g,vG} \sqrt{h}} + \frac{\sqrt{h}}{Q_L} \quad (5.69)$$

Die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  bestimmen je nach Wahl die Klangcharakteristik des Lautsprechers. Mit den Gleichungen (5.66) bis (5.69) ist es möglich, die Parameter für die Dimensionierung des Lautsprechers zu berechnen. Es wird dafür folgendermaßen vorgegangen.

Es existieren vier Gleichungen mit fünf unbekanntem Parametern. Das Gleichungssystem ist somit nicht eindeutig lösbar.

Die Verlustgüte  $Q_L$  kann im Vorhinein nicht berechnet werden. Sie ergibt sich erst nach dem Bauen des Lautsprechers und muss durch eine Impedanzmessung bestimmt werden. Für die erstmalige Berechnung der Lautsprecherparameter wird die Verlustgüte deshalb geschätzt. Typischerweise liegt die Verlustgüte im Bereich zwischen 5 und 20. Ein guter Startwert ist dafür  $Q_L = 7$ . Mit der Annahme der Verlustgüte ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Im nächsten Schritt wird (5.67) auf  $Q_{g,vG}$  umgeformt und in (5.69) eingesetzt. Daraus ergibt sich folgende Gleichung, die weiter vereinfacht werden kann. Mit der Substitution  $x = \sqrt{h}$  entsteht daraus die Gleichung (5.70).

$$a_3 = \frac{h^2 + a_1 Q_L \sqrt{h} - 1}{Q_L h \sqrt{h}}$$

$$h^2 - a_3 Q_L h \sqrt{h} + a_1 Q_L \sqrt{h} - 1 = 0$$

## 5. Elektrodynamischer Lautsprecher in Bassreflexgehäuse

$$x^4 - a_3 Q_L x^3 + a_1 Q_L x - 1 = 0 \quad (5.70)$$

Die Gleichung ist ein Polynom 4. Ordnung, das vier Lösungen besitzt. Händisch lässt sich das Polynom in dieser Form nur sehr aufwändig lösen. In dieser Arbeit wurde deshalb das Programm Matlab von MathWorks verwendet. Mit  $h = x^2$  und den Gleichungen (5.66) bis (5.69) können alle Parameter des Lautsprechersystems bestimmt werden. Das Gehäusevolumen und die Abmessungen des Bassreflexrohres berechnen sich ebenfalls aus diesen Werten. Jedoch führt nur eine der vier Lösungen zu reellen und positiven Werten für alle Gehäuseparameter. Die anderen Lösungen sind physikalisch nicht realisierbar.

Small entwickelte 1973 Alignment Charts, mit deren Hilfe die Lautsprecherparameter ohne das Lösen eines Polynoms 4. Ordnung möglich ist. Diese Alignment Charts existieren nur für bestimmte Verlustgüten. Heutzutage ist es jedoch einfacher und genauer, das Polynom 4. Ordnung und die Lautsprecherparameter direkt mit einem Computer zu berechnen. Aus diesem Grund wird auf Alignment Charts nicht weiter eingegangen.

Die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  können wie beim geschlossenen Gehäuse bestimmt werden. Die Filtercharakteristiken der Filtertheorie bieten auch hier gute Anhaltspunkte, um die gewünschte Klangcharakteristik des Lautsprechers zu erreichen. Die folgenden Werte für die Koeffizienten wurden von Small [11] für die bekannten Filtercharakteristiken bestimmt.

- Bessel Charakteristik, möglichst konstante Gruppenlaufzeit:

$$a_1 = 3,12394 \quad a_2 = 4,39155 \quad a_3 = 3,20108$$

- Butterworth Charakteristik, möglichst flacher und großer Durchlassbereich:

$$a_1 = a_3 = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \quad a_2 = 2 + \sqrt{2}$$

- Tschebyscheff Charakteristik, große Steilheit mit Welligkeit im Durchlassbereich:

$$a_1 = \frac{k \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{D}} \quad a_2 = \frac{1 + k^2(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{D}} \quad a_3 = \frac{a_1}{\sqrt{D}} \left(1 - \frac{1 - k^2}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$D = \frac{k^4 + 6k^2 + 1}{8}$$

Je größer der Faktor  $k$  gewählt wird, desto flacher verläuft der Übergang bei der Grenzfrequenz. Bei Werten  $k < 1$  entstehen Welligkeiten im Durchlassbereich.

Mit diesen Anhaltspunkten ist es möglich, den Bassreflexlautsprecher auf eine gewünschte Klangcharakteristik zu optimieren. Der Bassreflexlautsprecher kann somit ebenfalls als elektroakustisches System komplett beschrieben werden.

## 6. Matlab Programm

Zur einfacheren Analyse und Optimierung der beschriebenen Lautsprechersysteme wurde das Matlab Programm *Speaker Analyzer* entworfen. Es basiert auf den hergeleiteten Gleichungen und beinhaltet die Grenzen für die Gültigkeit der zugrunde liegenden Modelle. Das Matlab Programm ist Open Source und kann als Projekt unter der Quelle im Anhang B gefunden werden.

### 6.1. Funktionsweise und Bedienung

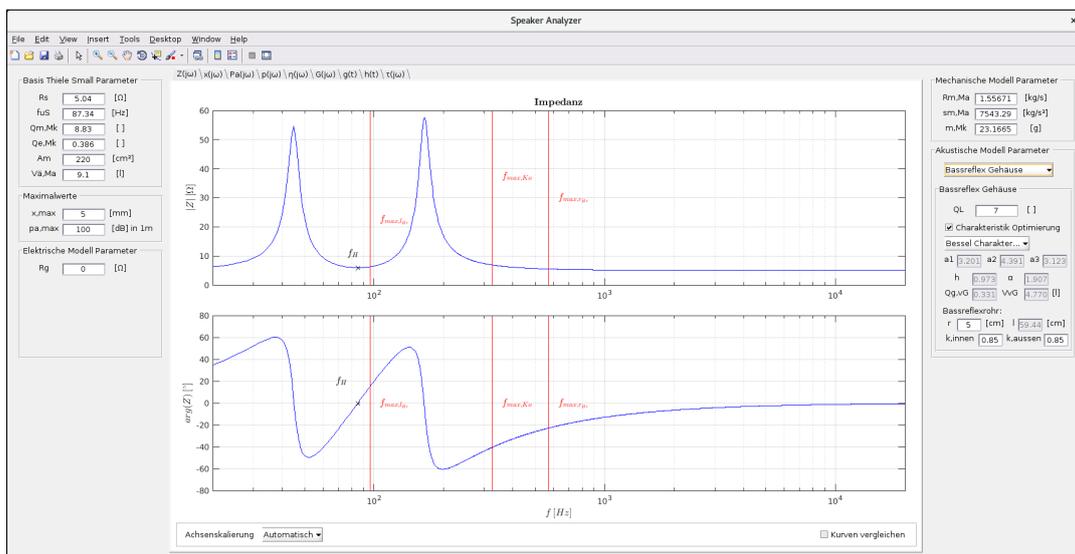


Abbildung 6.1.: Speaker Analyzer Programm in der Version 1.0.2 vom Oktober 2018

Im ersten Schritt wird üblicherweise ein Lautsprecherchassis von einem Hersteller ausgesucht und die Basis Thiele-Small-Parameter im linken Bereich des Programms eingegeben. Die maximale Membranauslenkung  $x, max$  des Chassis muss ebenfalls unter Maximalwerte eingegeben werden. Der Wert  $pa, max$  ist der gewünschte maximale Schalldruckpegel des Lautsprechers im Abstand von einem Meter, um die resultierende Auslenkung der Membran überprüfen zu können. Der Ausgangswiderstand  $Rg$  des Verstärkers kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

## 6. Matlab Programm

Mit der Eingabe dieser Parameter können die Diagramme im mittleren Bereich des Programms für die unendliche Schallwand berechnet werden. Die Eigenschaften Impedanz, Membranauslenkung, akustisch abgestrahlte Leistung, Schalldruckpegel, Wirkungsgrad, normierte Übertragungsfunktion, Impulsantwort, Sprungantwort und Gruppenlaufzeit werden mit den Gleichungen des jeweiligen Lautsprechersystems bei der Änderung eines Wertes berechnet. Die Achsenskalierung der Diagramme kann dabei automatisch oder manuell erfolgen. Die Funktion *Kurven vergleichen* speichert die Kurvenformen bei der Änderung der Parameter. Die Gültigkeitsbereiche der Modelle sind durch die roten Linien in den Diagrammen gekennzeichnet. Die Kurven sind nur zwischen den Grenzen *min* und *max* gültig. Bei der Membranauslenkung muss besonders darauf geachtet werden, dass die tatsächliche Membranauslenkung immer kleiner als  $x, max$  ist.

Im rechten Bereich des Programms befinden sich die Optimierungsmöglichkeiten für den mechanischen und akustischen Bereich. Die mechanischen Modellparameter beschreiben das mechanische Feder-Masse-System des Chassis. Sie werden direkt aus den Thiele-Small-Parametern berechnet und können genutzt werden, um das gewünschte Chassis in umgekehrter Reihenfolge zu finden. Mit den akustischen Modellparametern wird die Gehäuseart des Lautsprechersystems ausgewählt.

Beim Lautsprecher in der unendlichen Schallwand kann der Reibwiderstand und die akustische Masse der Strahlungsimpedanz bei einer gewünschten Frequenz berechnet werden. Beim geschlossenen Gehäuse wird zuerst die geschätzte oder gemessene Güte des Lautsprechers und der Füllungsfaktor eingegeben. Mit dem Parameter *Charakteristik Optimierung* kann die gewünschte Klangcharakteristik ausgewählt werden. Die akustischen Lautsprecher Parameter werden somit automatisch für diese Charakteristik berechnet. Ohne den Parameter Charakteristik Optimierung können die akustischen Änderungen des Lautsprechergehäuses genau untersucht werden. Beim Lautsprecher im Bassreflexgehäuse wird zuerst die geschätzte oder gemessene Verlustgüte des Lautsprechers eingegeben. Mit der Charakteristik Optimierung können ebenfalls die akustischen Parameter automatisch ermittelt werden. Der gewünschte Radius und die Endkorrekturfaktoren des Bassreflexrohres müssen noch zusätzlich für die Berechnung der Länge eingegeben werden.

Die Parameter der Lautsprechersysteme sind für das Bauen der Gehäuse mit diesem Programm komplett analysierbar und optimierbar. Die Änderungen in jedem Bereich der elektroakustischen Modelle können im Zeit- und Frequenzbereich genau untersucht und auf die Klangcharakteristik der Lautsprecher geschlossen werden. Zusätzlich ist der Vergleich der Lautsprechersysteme in einfacher Form möglich.

## 6.2. Beschreibung der Parameter

In diesem Abschnitt werden die Parameter des Programmes beschrieben. Die zugrundeliegenden Gleichungen sind in den folgenden Tabellen ebenfalls angegeben.

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
Rs	Widerstand der Schwingspule	$\Omega$	Kap. 3.2.1
fuS	Resonanzfrequenz	Hz	Gl. (3.65), (3.66)
Qm,Mk	Güte nur mit dem mechanischen Reibwiderstand		Gl. (3.67)
Qe,Mk	Güte nur mit dem elektrischen Widerstand		Gl. (3.68)
Am	Effektive Membranfläche	$cm^2$	Kap. 3.5
Vä,Ma	Äquivalentes Nachgiebigkeitsvolumen der Membranaufhängung	l	Gl. (3.70)

Tabelle 6.1.: Basis Thiele-Small-Parameter des Matlab Programms

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
x,max	Maximale Membranauslenkung	mm	Kap. 3.10
pa,max	Gewünschter maximaler Schalldruckpegel in einem Meter Abstand	dB	Gl. (3.90), (3.91) (für die Bestimmung von $U_g$ )

Tabelle 6.2.: Maximalwerte des Matlab Programms

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
Rg	Ausgangswiderstand des Verstärkers	$\Omega$	

Tabelle 6.3.: Elektrische Modellparameter des Matlab Programms

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
Rm,Ma	Mechanischer Reibungswiderstand der Membranaufhängung	kg/s	Gl. (3.67)
sm,Ma	Mechanische Steifigkeit der Membranaufhängung	kg/s <sup>2</sup>	Gl. (3.70)
m,Mk	Masse der Membrankonstruktion	g	Gl. (3.65)

Tabelle 6.4.: Mechanische Modellparameter des Matlab Programms

## 6. Matlab Programm

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
f	Frequenz für die Berechnung von $R_{a,uS}$ und $m_{a,uS}$	Hz	
$R_{a,uS}$	Akustischer Reibwiderstand der Strahlungsimpedanz	$kg/(sm^4)$	Gl. (3.47)
$m_{a,uS}$	Akustische Masse der Strahlungsimpedanz	$kg/m^4$	Gl. (3.48)

Tabelle 6.5.: Akustische Modellparameter bei der unedlichen Schallwand des Matlab Programms

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
$Q_{m,gG}$	Gemessene oder geschätzte Güte des geschlossen Gehäuses		Gl. (3.69), (4.30)
Füllung	Faktor zur Berücksichtigung der Füllung		Gl. (4.2)
$a_1$	Koeffizient der normierten Filterfunktion		Gl. (4.30)
$\alpha$	Steifigkeitsverhältnis		Gl. (4.16)
$Q_{g,gG}$	Gesamte Güte des Lautsprechers im geschlossen Gehäuse		Gl. (3.69)
$V_{gG}$	Volumen des geschlossen Gehäuses	$l$	Gl. (4.16), (4.2)

Tabelle 6.6.: Akustische Modellparameter beim geschlossenen Gehäuse des Matlab Programms

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
QL	Gemessene oder geschätzte Verlustgüte		Gl. (5.44)
$a_1, a_2, a_3$	Koeffizienten der normierten Filterfunktion		Gl. (5.67), (5.68), (5.69)
h	Abstimmungsverhältnis		Gl. (5.65)
$\alpha$	Steifigkeitsverhältnis		Gl. (4.16)
$Q_{g,gG}$	Gesamte Güte des Bassreflexlautsprechers		Gl. (5.67)
$V_{gG}$	Volumen des Bassreflexgehäuses	$l$	Gl. (4.16)
r	Radius des Bassreflexrohres	cm	Kap. 5.1.2
l	Länge des Bassreflexrohres	cm	Kap. 5.1.2
k <sub>innen</sub>	Endkorrekturfaktor innerhalb des Bassreflexrohres		Kap. 5.1.2
k <sub>ausen</sub>	Endkorrekturfaktor außerhalb des Bassreflexrohres		Kap. 5.1.2

Tabelle 6.7.: Akustische Modellparameter beim Bassreflexlautsprecher des Matlab Programms

## 6. Matlab Programm

Parameter	Beschreibung	Einheit	Referenz
$Z(j\omega)$	Impedanzverlauf des ausgewählten Lautsprechersystems	$\Omega$	Gl. (3.73), (4.23), (5.49)
$\arg(Z)$	Phasengang des ausgewählten Lautsprechersystems	$^\circ$	Gl. (3.73), (4.23), (5.49)
$x(j\omega)$	Membranauslenkung des ausgewählten Lautsprechersystems	$mm$	Gl. (3.97), (4.27), (5.62)
$Pa(j\omega)$	Akustisch abgestrahlte Leistung des ausgewählten Lautsprechersystems	$dB$	Gl. (3.83), (4.24), (5.59)
$pa(j\omega)$	Schalldruckpegel in 1m Abstand des ausgewählten Lautsprechersystems	$dB$	Gl. (3.90), (4.25), (5.60)
$\eta(j\omega)$	Wirkungsgrad des ausgewählten Lautsprechersystems	$\%$	Gl. (3.94), (4.26), (5.61)
$G(j\omega)$	Normierte Übertragungsfunktion des ausgewählten Lautsprechersystems	$dB$	Gl. (3.82), (4.22), (5.58)
$\arg(G)$	Phasengang der normierten Übertragungsfunktion	$^\circ$	Gl. (3.82), (4.22), (5.58)
$g(t)$	Impulsantwort des ausgewählten Lautsprechersystems	$V$	Impulsantwort von $G(j\omega)$
$h(t)$	Sprungantwort des ausgewählten Lautsprechersystems	$V$	Sprungantwort von $G(j\omega)$
$\tau(j\omega)$	Gruppenlaufzeit des ausgewählten Lautsprechersystems	$s$	Gruppenlaufzeit von $G(j\omega)$
$f_{max,Ko}$	Maximale nutzbare Frequenz für das Modell der Strahlungsimpedanz	$Hz$	Gl. (3.36)
$f_{max,r_{Br}}$	Maximale nutzbare Frequenz für den Radius des Bassreflexrohres	$Hz$	Gl. (5.1)
$f_{max,l_{Br}}$	Maximale nutzbare Frequenz für die Länge des Bassreflexrohres	$Hz$	Gl. (5.16)
$f_{3dB}$	Grenzfrequenz bei $-3dB$	$Hz$	
$f_H$	Resonanzfrequenz des akustischen Resonators	$Hz$	Gl. (5.44)

Tabelle 6.8.: Diagramme des Matlab Programms

## 7. Zusammenfassung

Am Anfang dieser Arbeit wurde in Kapitel 2 gezeigt, wie die elektrische-, mechanische- und akustische Domäne miteinander zusammenwirkt. Mit diesen physikalischen Zusammenhängen kann ein Lautsprechersystem als gesamtes Modell für tiefe Frequenzen beschrieben werden. Bei der Modellbildung muss beachtet werden, unter welchen Bedingungen das Modell gültig ist. Üblicherweise wird dafür der interessante Bereich mit mathematischen Gleichungen beschrieben und daraus ein elektroakustisches Modell erstellt. Alle Annahmen und Näherungen bei der Modellbildung ergeben schlussendlich den Gültigkeitsbereich des Modells. Die Modellbildung der Lautsprechersysteme, Lautsprecher mit geschlossenem und Bassreflexgehäuse, wurde nach dieser Vorgehensweise in den Kapiteln 4 und 5 durchgeführt.

Der Lautsprecher in der unendlichen Schallwand in Kapitel 3 stellt die Grundlage für die Beschreibung der Lautsprechersysteme mit geschlossenem und mit Bassreflexgehäuse dar. Die Lautsprecherparameter können in der unendlichen Schallwand relativ einfach gemessen und berechnet werden. Der Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse in Kapitel 4 besitzt zusätzlich zur unendlichen Schallwand die Steifigkeit des Luftvolumens im Gehäuse, was die Änderung und Optimierung der Klangcharakteristik erlaubt.

Beim Lautsprecher im Bassreflexgehäuse in Kapitel 5 wird das Modell durch einen akustischen Resonator des Gehäuses erweitert. Die Analysemethoden der unendlichen Schallwand bieten auch hier gute Dienste. Mit dem zusätzlichen Resonator kann der Frequenzbereich zu tiefen Frequenzen erweitert und die Klangeigenschaften des Lautsprechers beeinflusst werden.

Der Schalldruck im beliebigen Abstand vom Bassreflexlautsprecher ist proportional zur Eingangsspannung, umgekehrt proportional zum Abstand und besitzt die Funktion  $G(s)$  eines Hochpassfilters 4. Ordnung. Die klanglichen Eigenschaften des Lautsprechers werden dabei durch die frequenzabhängige Funktion  $G(s)$  bestimmt. Mit Hilfe der Filtereigenschaften, Bessel, Butterworth und Tschebyscheff ist es möglich, den Bassreflexlautsprecher auf die gewünschte Klangcharakteristik zu optimieren.

Für die einfachere Analyse und zur praktischen Dimensionierung der Lautsprechersysteme wurde ein Matlab Programm aus den hergeleiteten Gleichungen erstellt. Das in Kapitel 6 beschriebene Programm ermöglicht es, Änderungen im elektrischen, mechanischen und akustischen Bereich durchzuführen und die Auswirkungen auf

## 7. Zusammenfassung

das Gesamtsystem bei tiefen Frequenzen zu betrachten. Aus der berechneten normierten Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Lautsprechers kann zusätzlich durch Betrachtung der Impulsantwort, Sprungantwort und Gruppenlaufzeit auf die Klangcharakteristik des Lautsprechers geschlossen werden. Das Matlab Programm ist Open Source und kann unter der Quelle im Anhang [B](#) heruntergeladen werden.

Zum Abschluss möchte ich mich bei meinem Betreuer Gerhard Graber für die tatkräftige Unterstützung herzlichst bedanken. Ohne ihn wäre die Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen. Ein weiterer Dank geht an das Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation für die Bereitstellung der benötigten Räumlichkeiten und Hilfsmittel.

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Grundprinzipien des elektrodynamischen Wandlers . . . . .	12
3.1. Funktionsweise des elektrodynamischen Lautsprechers [1, Abb. 6.1] .	17
3.2. Elektrisches Modell des elektrodynamischen Lautsprechers . . . . .	18
3.3. Elektromechanisches Modell des elektrodynamischen Lautsprechers .	18
3.4. Darstellung der Kugelwelle . . . . .	21
3.5. Darstellung der Punktquelle . . . . .	23
3.6. Kolbenmembran in unendlicher Schallwand . . . . .	24
3.7. Richtungsmaß der Kolbenmembran in Abhängigkeit von $kr_M$ . . . . .	27
3.8. Einfaches akustisches Modell für die Strahlungsimpedanz . . . . .	30
3.9. Normierte Strahlungsimpedanz mit einfacher Näherung für tiefe Frequenzen . . . . .	31
3.10. Erweitertes akustisches Modell für die Strahlungsimpedanz . . . . .	32
3.11. Normierte Strahlungsimpedanz mit erweiterter Näherung für alle Frequenzen . . . . .	32
3.12. Elektroakustisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand . . . . .	33
3.13. Elektromechanisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand . . . . .	34
3.14. Elektrisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand . . . . .	34
3.15. Vereinfachtes elektrisches Modell für den Lautsprecher in unendlicher Schallwand . . . . .	35
3.16. Parallelschwingkreis . . . . .	36
3.17. Vereinfachte Schaltung bei der Resonanzfrequenz . . . . .	37
3.18. Schaltung für die Bestimmung der Eingangsimpedanz . . . . .	38
3.19. Schaltung für die Bestimmung der akustischen Leistung . . . . .	40
3.20. Schaltung mit umgewandelter Quelle für die Bestimmung der akustischen Leistung . . . . .	40
3.21. Schematische Darstellung der akustischen Leistung . . . . .	42
3.22. Vereinfachte Schaltung für die Bestimmung der elektrischen Leistung . . . . .	44
4.1. Akustisches Modell für geschlossene Gehäuse . . . . .	47
4.2. Elektroakustisches Modell für den Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse . . . . .	49
4.3. Elektrisches Modell für den Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse . . . . .	49

## Abbildungsverzeichnis

4.4.	Vereinfachtes elektrisches Modell für den Lautsprecher im geschlossenen Gehäuse . . . . .	51
5.1.	Zylinderförmiges Bassreflexrohr . . . . .	57
5.2.	Elektroakustisches Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse . . . . .	60
5.3.	Elektrisches Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse . . . . .	61
5.4.	Elektrisch vereinfachtes Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse . . . . .	62
5.5.	Vereinfachtes Modell für den Lautsprecher im Bassreflexgehäuse . . . . .	63
5.6.	Schaltung für die Bestimmung der Eingangsimpedanz mit Bassreflexgehäuse . . . . .	64
5.7.	Serienschwingkreis . . . . .	64
5.8.	Schaltung für die Bestimmung der akustischen Leistung beim Bassreflexgehäuse . . . . .	66
5.9.	Schaltung mit umgewandelter Quelle für die Bestimmung der akustischen Leistung beim Bassreflexgehäuse . . . . .	67
6.1.	Speaker Analyzer Programm in der Version 1.0.2 vom Oktober 2018 . . . . .	72
A.1.	Übertragungsfunktion der Filtercharakteristiken . . . . .	83
A.2.	Impulsantwort der Filtercharakteristiken . . . . .	84
A.3.	Sprungantwort der Filtercharakteristiken . . . . .	84
A.4.	Gruppenlaufzeit der Filtercharakteristiken . . . . .	85

# Tabellenverzeichnis

6.1.	Basis Thiele-Small-Parameter des Matlab Programms . . . . .	74
6.2.	Maximalwerte des Matlab Programms . . . . .	74
6.3.	Elektrische Modellparameter des Matlab Programms . . . . .	74
6.4.	Mechanische Modellparameter des Matlab Programms . . . . .	74
6.5.	Akustische Modellparameter bei der unedlichen Schallwand des Matlab Programms . . . . .	75
6.6.	Akustische Modellparameter beim geschlossenen Gehäuse des Matlab Programms . . . . .	75
6.7.	Akustische Modellparameter beim Bassreflexlautsprecher des Matlab Programms . . . . .	75
6.8.	Diagramme des Matlab Programms . . . . .	76

# Literatur

- [1] L. L. Beranek und T. Mellow, *Acoustics: Sound Fields and Transducers*, 1.;1st; US: Academic Press, 2012.
- [2] N. Thiele, »Loudspeakers in Vented Boxes: Part 1«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 19, Nr. 5, S. 382–392, 1971. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=2173>.
- [3] N. Thiele, »Loudspeakers in Vented Boxes: Part 2«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 19, Nr. 6, S. 471–483, 1971. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=2163>.
- [4] R. H. Small, »Direct Radiator Loudspeaker System Analysis«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 20, Nr. 5, S. 383–395, 1972. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=2066>.
- [5] R. H. Small, »Closed-Box Loudspeaker Systems-Part 1: Analysis«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 20, Nr. 10, S. 798–808, 1972. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=2022>.
- [6] R. H. Small, »Closed-Box Loudspeaker Systems-Part 2: Synthesis«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 21, Nr. 1, S. 11–18, 1973. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=2011>.
- [7] A. L. Thuras, »Sound translating device«, 1932, US Patent 1,869,178.
- [8] R. H. Small, »Vented-Box Loudspeaker Systems-Part 1: Small-Signal Analysis«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 21, Nr. 5, S. 363–372, 1973. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=1967>.
- [9] R. H. Small, »Vented-Box Loudspeaker Systems-Part 2: Large-Signal Analysis«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 21, Nr. 6, S. 438–444, 1973. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=1959>.
- [10] R. H. Small, »Vented-Box Loudspeaker Systems-Part 3: Synthesis«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 21, Nr. 7, S. 549–554, 1973. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=1951>.
- [11] R. H. Small, »Vented-Box Loudspeaker Systems-Part 4: Appendices«, *J. Audio Eng. Soc*, Jg. 21, Nr. 8, S. 635–639, 1973. Adresse: <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=1941>.

# Anhang A.

## Vergleich der Filtercharakteristiken

In den folgenden Abbildungen sind die Filtercharakteristiken für den Vergleich im Zeit- und Frequenzbereich dargestellt. Die Kurven wurden für das geschlossene Gehäuse berechnet, gelten aber auch für den Bassreflexlautsprecher.

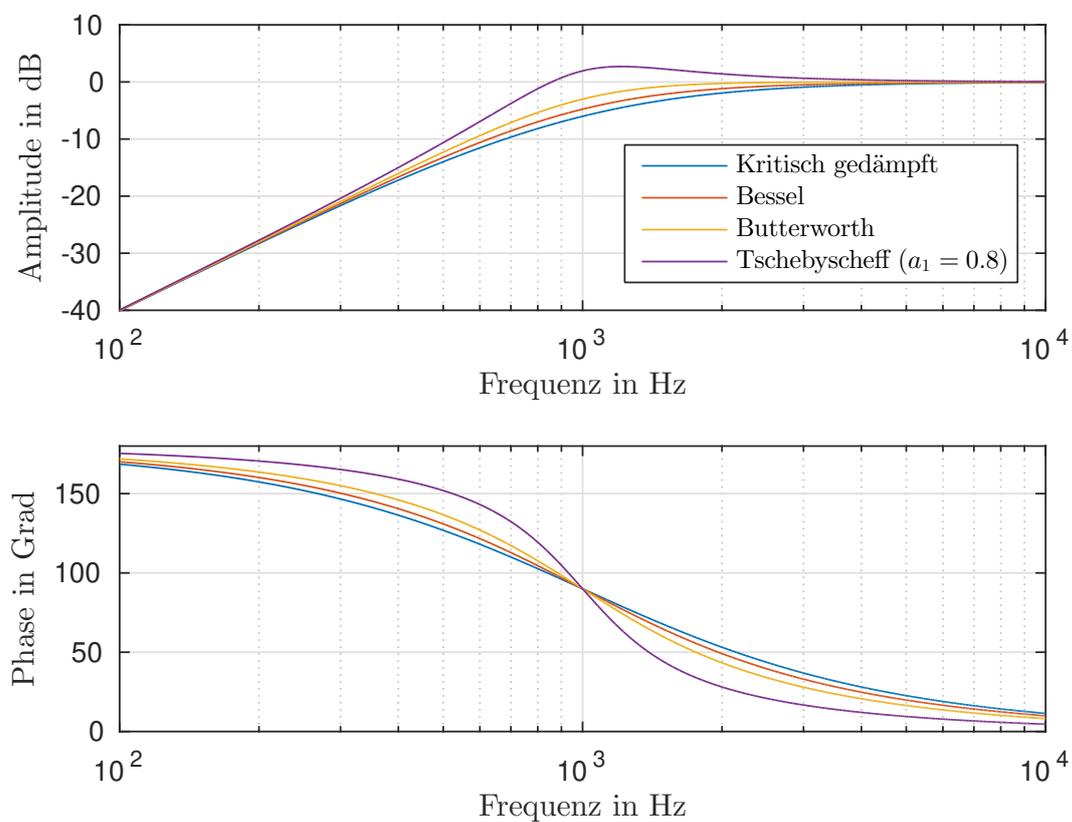


Abbildung A.1.: Übertragungsfunktion der Filtercharakteristiken

## Anhang A. Vergleich der Filtercharakteristiken

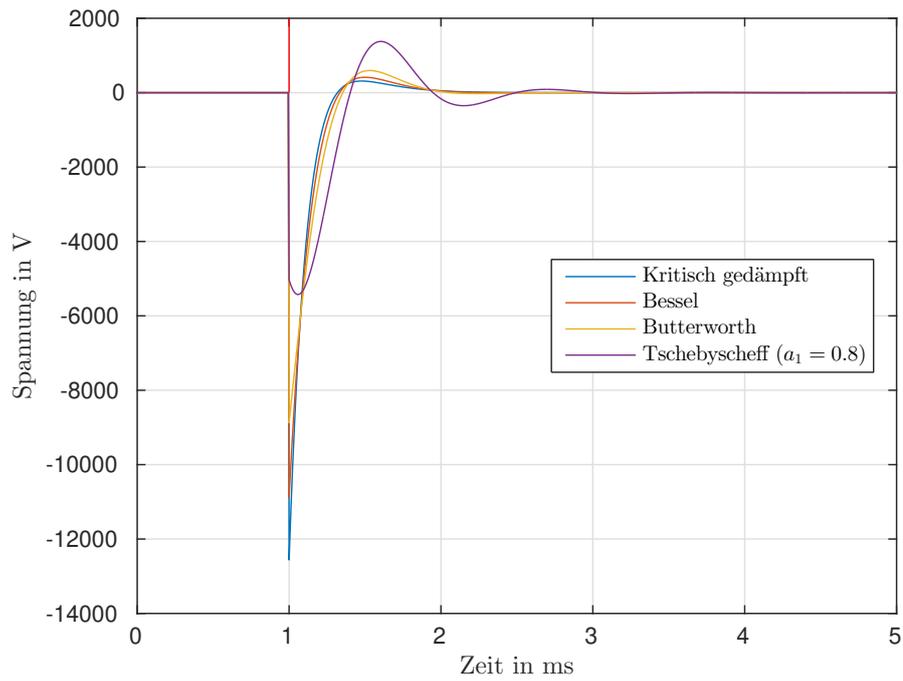


Abbildung A.2.: Impulsantwort der Filtercharakteristiken

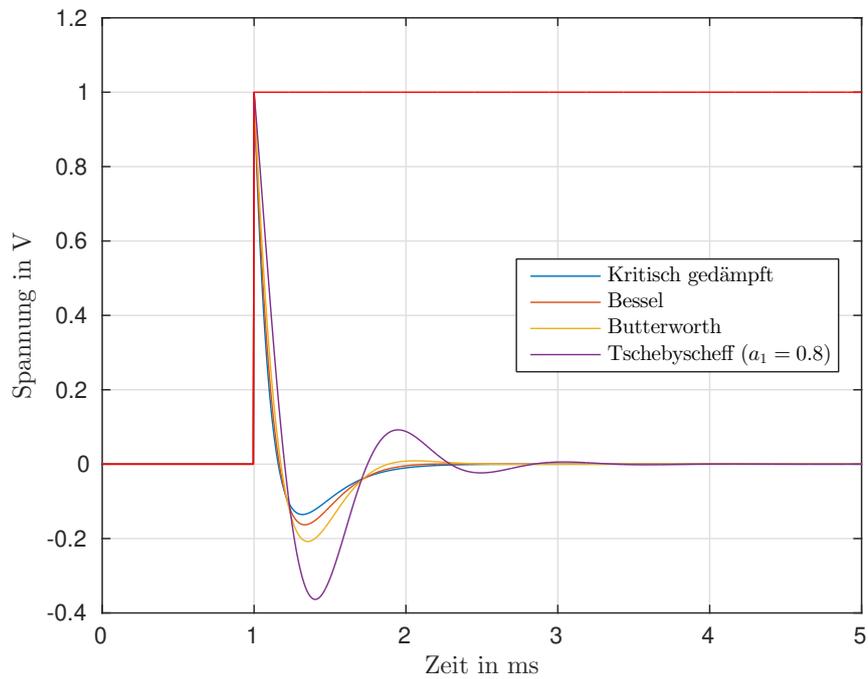


Abbildung A.3.: Sprungantwort der Filtercharakteristiken

## Anhang A. Vergleich der Filtercharakteristiken

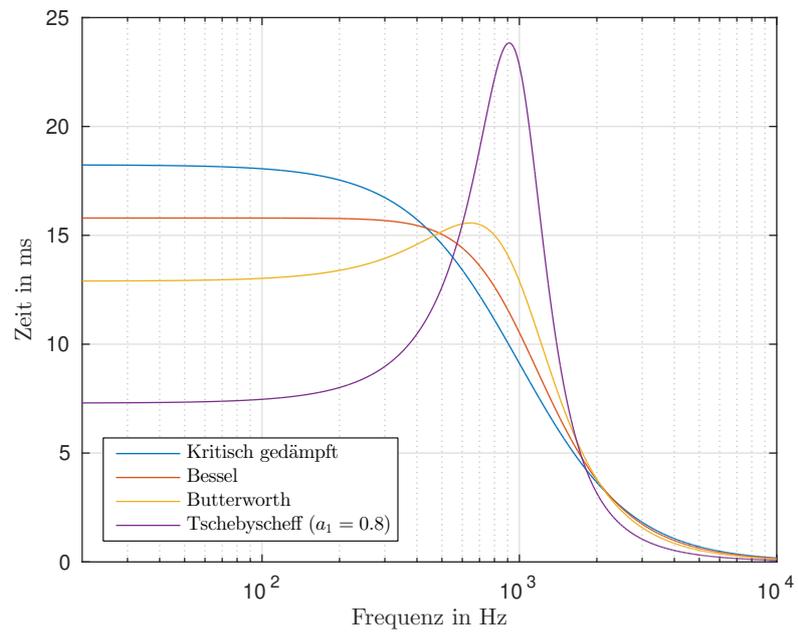


Abbildung A.4.: Gruppenlaufzeit der Filtercharakteristiken

## Anhang B.

### Quelle des Matlab Programmes

Das Matlab Programm *Speaker Analyzer* ist Open Source und als GitLab Projekt unter folgendem Link zu finden. Es ist mit der GNU General Public License lizenziert und kann unter Einhaltung der Bedingungen verwendet und erweitert werden.

[https://gitlab.com/florian\\_ls/speaker\\_analyzer](https://gitlab.com/florian_ls/speaker_analyzer)