Schnelle Faltung – The Maths

Ich möchte darauf hinweisen, dass diese Unterlage *keine offizielle* Lernunterlage ist! Ich garantiere nicht für Fehlerfreiheit – ich bitte aber darum, mir etwaige Fehler per Mail (`geiger@ieee.org`) mitzuteilen. Mehr zu diesem Thema finden Sie in Kapitel 8 (The Discrete Fourier Transform) von Oppenheim & Schafer, Discrete-Time Signal Processing, 3rd edition.

Schnelle Faltung

Wir beginnen mit dem Fall, bei dem nur das Eingangssignal $x[n]$ in Blöcke der Länge L aufgeteilt wird. Es sei dabei $B = \lceil N_x/L \rceil$ die Anzahl der Blöcke, und mit

$$x_r[n] := \begin{cases} x[n+rL], & \text{für } n = 0,\dots,L-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

können wir $x[n]$ als Summe von verschobenen Blöcken schreiben:

$$x[n] = \sum_{r=0}^{B} x_r[n-rL]$$

Mit der Definition des diskreten Einheitsimpulses und dessen Faltungseigenschaft ("Copy & Paste-Eigenschaft") gilt natürlich $\{x_r[n-rL]\} = \{x_r[n]\} * \{\delta[n-rL]\}$. Um das etwas schöner zu schreiben, definieren wir

$$\delta_k[n] := \delta[n-k]$$

also eine Funktion δ_k die einem um k nach rechts verschobenen Einheitsimpuls entspricht. Natürlich gilt mit der Faltungseigenschaft $(\delta_l * \delta_m)[n] = \delta_{l+m}[n]$.

Damit können wir nun $x_r[n-rL] = (x_r * \delta_{rL})[n]$ schreiben und obige Gleichung für $x[n]$ lautet

$$x[n] = \sum_{r=0}^{B} (x_r * \delta_{rL})[n].$$

Nun falten wir das Signal $x[n]$ mit der Impulsantwort $h[n]$ und erhalten das Ausgangssignal $y[n]$:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= (x * h)[n] \\
&= \left(\sum_{r=0}^{B} (x_r * \delta_{rL}) * h \right) [n] \\
&\stackrel{(a)}{=} \sum_{r=0}^{B} \left((x_r * \delta_{rL}) * h \right) [n] \\
&\stackrel{(b)}{=} \sum_{r=0}^{B} \left((x_r * h) * \delta_{rL} \right) [n] \\
&\stackrel{(c)}{=} \sum_{r=0}^{B} \left(y_r * \delta_{rL} \right) [n] \\
&\stackrel{(d)}{=} \sum_{r=0}^{B} y_r[n - rL]
\end{aligned}
$$

wobei wir in (a) die Linearität (oder Distributivität) und in (b) die Assoziativität der Faltung ausgenutzt haben. Gleichung (c) folgt da $(x_r * h)[n] = y_r[n]$, und Gleichung (d) durch Einsetzen der Definition von δ_k und der Faltungseigenschaft des Einheitsimpulses. Es folgt also, dass das Signal $y[n]$ durch die Summe von zeitverschobenen Teilfaltungsergebnissen $y_r[n]$ zusammengesetzt wird.

Modifizierte schnelle Faltung

Wir teilen nun sowohl das Eingangssignal als auch die Impulsantwort in zwei Blöcke der Länge L auf, so wie wir es im Hörsaal gemacht haben. Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
x[n] &= x_0[n] + x_1[n - L] = x_0[n] + (x_1 * \delta_L)[n] \\
h[n] &= h_0[n] + h_1[n - L] = h_0[n] + (h_1 * \delta_L)[n]
\end{aligned}
$$

Und wieder berechnen wir die Faltung (mit Distributivität und Assoziativität):

$$
\begin{aligned}
y[n] &= (x * h)[n] \\
&= \left((x_0 + x_1 * \delta_L) * (h_0 + h_1 * \delta_L) \right) [n] \\
&= \left(x_0 * h_0 + x_1 * \delta_L * h_0 + x_0 * h_1 * \delta_L + x_1 * \delta_L * h_1 * \delta_L \right) [n] \\
&= \left(x_0 * h_0 + x_1 * \delta_L * h_0 + x_0 * h_1 * \delta_L + x_1 * h_1 * \delta_{2L} \right) [n] \\
&= (x_0 * h_0)[n] + ((x_1 * h_0) * \delta_L)[n] + ((x_0 * h_1) * \delta_L)[n] + ((x_1 * h_1) * \delta_{2L})[n] \\
&= y_{00}[n] + (y_{10} * \delta_L)[n] + (y_{01} * \delta_L)[n] + (y_{11} * \delta_{2L})[n] \\
&= y_{00}[n] + ((y_{10} + y_{01}) * \delta_L)[n] + (y_{11} * \delta_{2L})[n]
\end{aligned}
$$

Dabei sind $y_{ij}[n]$ die Ergebnisse der inversen DFT, und aus der letzten Zeile geht hervor dass wir zwei der Ergebnisse bereits im Frequenzbereich addieren dürfen, da sie um den selben Betrag verschoben werden müssen.