Modulo-Operationen und die DFT

Ich möchte darauf hinweisen, dass diese Unterlage *keine offizielle* Lernunterlage ist! Ich garantiere nicht für Fehlerfreiheit – ich bitte aber darum, mir etwaige Fehler per Mail (`geiger@ieee.org`) mitzuteilen. Mehr zu diesem Thema finden Sie in Kapitel 8 (The Discrete Fourier Transform) von Oppenheim & Schafer, Discrete-Time Signal Processing, 3rd edition.

Der Modulo-Operator

Wir beginnen mit der Definition des Modulo-Operators:

$$n \text{ mod } N := n - N\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$$

Es handelt sich dabei also um den Rest einer Division. Weiters gilt, dass nach obiger Definition für positives N der Rest positiv sein muss. Wir betrachten dazu folgendes

> **Beispiel 1.** Sei $N = 4$ und $n = -3$. Wir zeigen nun, dass in diesem Fall $n \text{ mod } N \geq 0$.
>
> $$\begin{aligned} (-3) \text{ mod } 4 &= -3 - 4\left\lfloor \frac{-3}{4} \right\rfloor \\ &= -3 - 4\lfloor -0.75 \rfloor \\ &= -3 - 4(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eine weitere Eigenschaft des Modulo-Operators ist, dass man ihn in bestimmten Fällen "verschachteln" kann. Es gilt nämlich selbstverständlich für alle ganzzahligen k

$$(n + kN) \text{ mod } N = n \text{ mod } N.$$

Damit wiederum können wir nämlich folgendes zeigen:

$$\begin{aligned} (n \text{ mod } N + m) \text{ mod } N &= (n - N\underbrace{\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor}_{=k} + m) \text{ mod } N \\ &= (n - kN + m) \text{ mod } N \\ &= (n + m) \text{ mod } N \end{aligned}$$

Ein konkretes Beispiel: Anwendung in der DFT

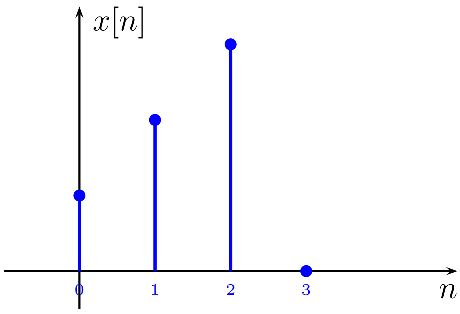


Fig. 1: Signal $x[n]$

Wir betrachten nun das Beispiel aus der Übung. Gegeben sei also ein reelles Signal

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

welches nur für $n = 0, 1, 2, 3$ (also $N = 4$) definiert ist. Wir suchen nun die Beschreibung für ein Signal $x_3[n]$, welches wie folgt definiert ist:

$$x_3[n] = \mathrm{DFT}^{-1}(X^*[k])$$

Wir berechnen also die DFT $X[k]$ von $x[n]$, konjugieren diese, und berechnen uns schließlich das dazugehörige Zeitsignal $x_3[n]$. Anstatt alle diese Operationen tatsächlich auszuführen, versuchen wir das Ergebnis über die Eigenschaften der DFT zu bestimmen. Tatsächlich finden wir in der Formelsammlung die Beziehung

$$x_3[n] = \mathrm{DFT}^{-1}(X^*[k]) = x^*[(-n) \bmod N] = x[(-n) \bmod N]$$

Da $x[n]$ in diesem Fall nur für $n = 0, 1, 2, 3$ definiert ist, gilt selbiges natürlich auch für $x_3[n]$. Wir betrachten nun einige Möglichkeiten, das Signal $x_3[n]$ zu bestimmen.

Stures Einsetzen: Das scheint wohl die einfachste Möglichkeit zu sein. Wir setzen also für jedes n in $x[n]$ den Index $(-n) \bmod 4$ ein. Wir erhalten damit:

$$x_3[n] = \delta[(-n) \bmod 4] + 2\delta[(-n) \bmod 4 - 1] + 3\delta[(-n) \bmod 4 - 2]$$

Um die Werte von $x_3[n]$ für $n = 0, 1, 2, 3$ zu bestimmen, verwenden wir einfach eine Wertetabelle:

n	$(-n) \bmod 4$
0	0
1	3
2	2
3	1

Betrachten wir z.B. den letzten Term: $3\delta[(-n) \bmod 4 - 2]$. Für $n = 2$ wird $(-n) \bmod 4 = 2$, und wenn wir davon noch 2 abziehen erhalten wir Null. Daher gilt in diesem Fall

$$3\delta[(-n) \bmod 4 - 2] = 3\delta[n - 2].$$

Das sieht man insbesondere, wenn man die Definition der Modulo-Operation verwendet:

$$(-n) \bmod 4 = \begin{cases} -n, & n = 0 \\ -n + 4, & n = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Für $n = 0$ erhalten wir also $3\delta[0 \bmod 4 - 2] = 3\delta[0 - 2] = 0$, und für alle anderen n erhalten wir

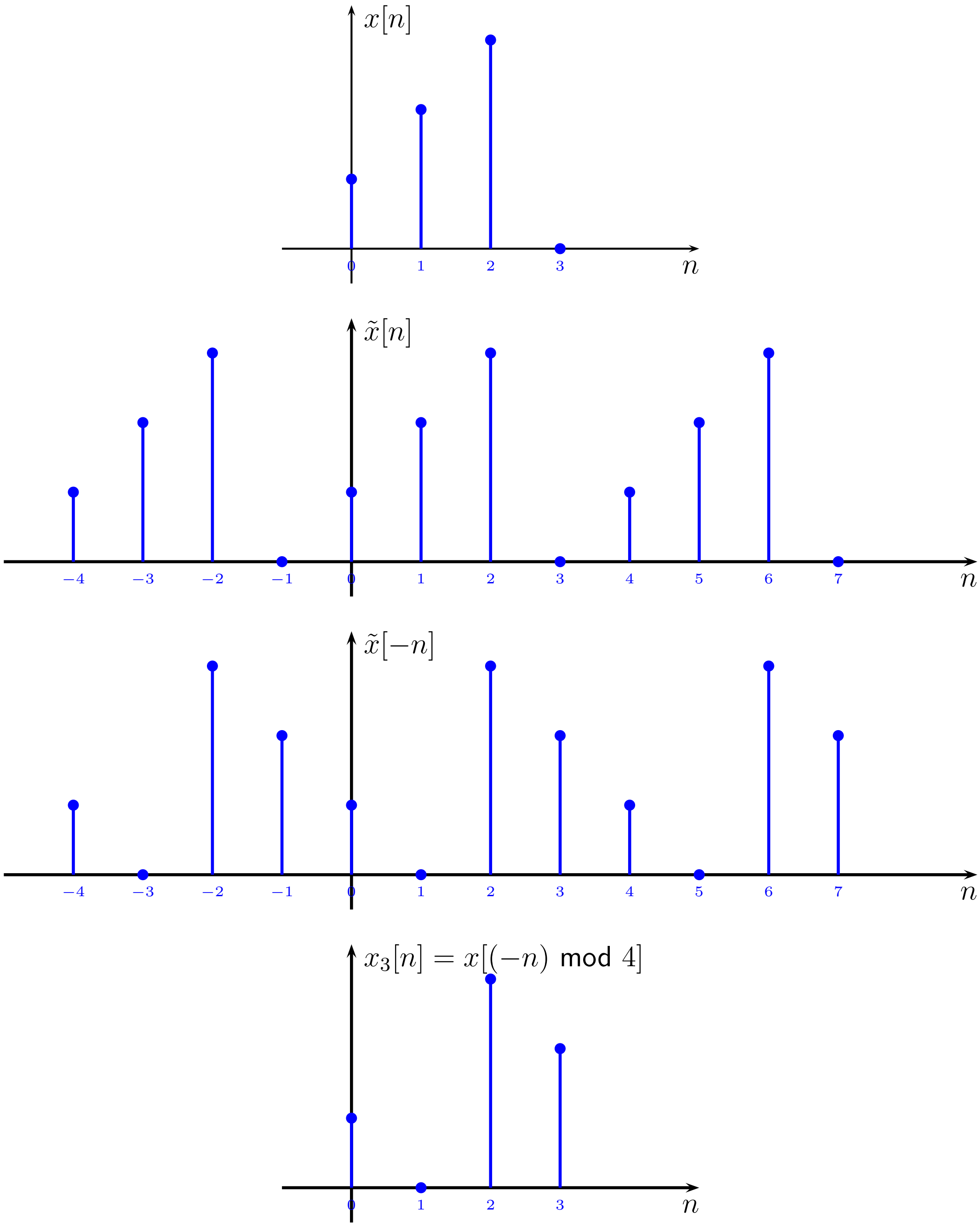
$$3\delta[(-n) \bmod 4 - 2] = 3\delta[-n + 4 - 2] = 3\delta[-n + 2] = 3\delta[n - 2]$$

da die Delta-Funktion geradsymmetrisch ist. Dieses Ergebnis dürfen wir schließlich für alle $n = 0, 1, 2, 3$ verwenden, da es für $n = 0$ ebenfalls zu $3\delta[0 - 2] = 0$ führt.

Führen wir das auch für die anderen beiden Terme aus, erhalten wir

$$x_3[n] = \delta[n] + 2\delta[n - 3] + 3\delta[n - 2].$$

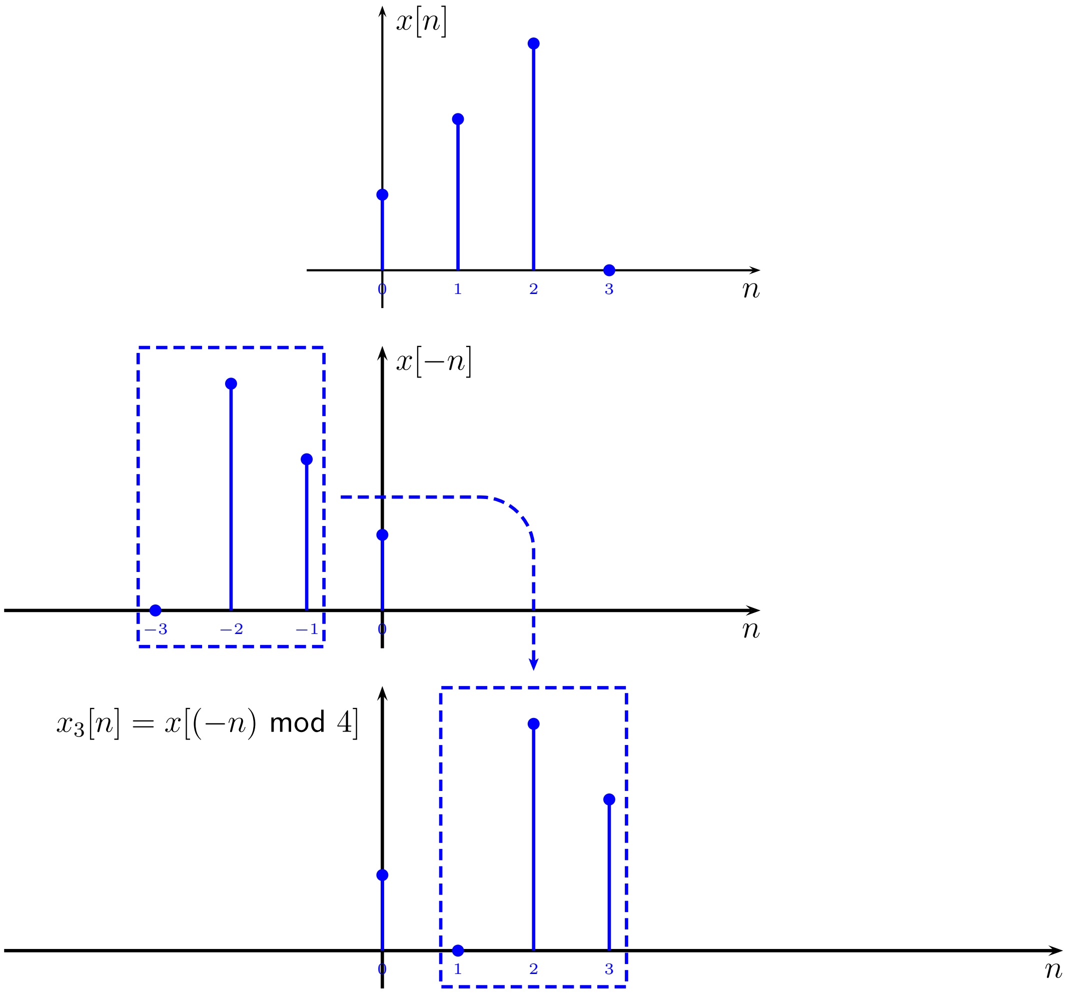
Periodische Fortsetzung, Operation, Ausschneiden der Hauptperiode: Auch diese Methode ist recht einfach. Man geht so vor, dass man zuerst das Signal $x[n]$ zuerst periodisch fortsetzt, dann die Operation *ohne* Modulo ausführt und anschließend die Hauptperiode wieder ausschneidet. Die folgende Skizze sollte dies veranschaulichen:



Das dargestellte Signal entspricht genau der Beschreibung, die wir durch stures Einsetzen erhalten haben:

$$x_3[n] = \delta[n] + 2\delta[n-3] + 3\delta[n-2].$$

Zyklische Operation: Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Operation "linear", also ohne Modulo, auszuführen und das Ergebnis dann auf die Hauptperiode abbilden. Es gilt dabei (so ungefähr): "Was rechts aus der Hauptperiode rausfällt, kommt links wieder rein. Und umgekehrt."



Wieder erhalten wir das selbe Ergebnis.

Anmerkungen: Die drei Methoden hängen natürlich zusammen. Die periodische Fortsetzung ergibt sich z.B. durch $\tilde{x}[n] = x[n \text{ mod } 4]$. Andererseits kann man natürlich auch $x[-n]$ periodisch fortsetzen und dann die Hauptperiode ausschneiden. In allen Fällen ergibt sich, wie man sich leicht überlegen kann, dass stures Einsetzen zur Lösung führt. Die graphischen Ansätze sind aber leichter zu verstehen, und helfen, das Ergebnis einfach überprüfen zu können.