Signaltransformationen (1 VO + 1 UE)
Teil 2: Fourier-Analyse

Klaus Witrisal

Technische Universität Graz
Institut für Signalverarbeitung und Sprachkommunikation
http://spsc.tugraz.at

Überblick der Vorlesungsthemen
May 12, 2017

Konzept der Fourier-Analyse

- Diskussion von *"Signaltransformationen"* aus der Sicht der Signalverarbeitung und Nachrichtentechnik

- **Idee:** Darstellung von Signalen als *Linearkombination* von "Standard"-Signalen (**Basis- bzw. Eigensignale**)
- **Fourier-Analyse:** gewählt werden **komplexe Exponentialfunktionen**
  - Bsp.: (Fourier Reihe)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

a_k ... Gewichtsfaktoren
$e^{jk\omega_0 t}$ ... komplexe Exponentialfunktionen

Bsp: Diskussion der komplexen Exponentialfunktion

- geg.: $x(t) = Ce^{at}$, wobei C und a komplexwertig sein können
- Fall 1:
  - $C, a \in \mathbb{R}$ (reellwertig)
  - wir erhalten reelwertige, exponentiell anwachsende $(r > 0)$ bzw. abfallende $(r < 0)$ Funktionen
- **Fall 2:** (Verwendung in der Fourier-Analyse!)
  - $a = j\omega$ (rein imaginaerwertig)
  - $C \in \mathbb{C}$ (komplexwertig); $C = |C|e^{j\varphi}$
  - wir erhalten komplexwertige, **periodische** Funktionen mit **konstantem Betrag** (Bsp.: Beweise dieser Eigenschaften)
  - in der komplexen Ebene: Zeiger, der mit konstanter Geschwindigkeit (ω) rotiert (Bsp.: Illustration)
- Fall 3:
  - $a \in \mathbb{C}$ $(a = j\omega + \sigma)$ und $C \in \mathbb{C}$ (beide komplexwertig)
  - bedämpfte, komplexe Exponentialfunktionen

Bedeutung der Signaldarstellung durch komplexe Exponentialfunktionen

1. Interpretation des Frequenzgehalts von Signalen
   - durch Frequenzen und Amplituden der Exponential-schwingungen
   - **dazu ist es wichtig, dass eine “breite Klasse” von Signalen darstellbar ist!**

2. Betrachtung von linearen, zeitinvarianten (LZI) Systemen
   - Antwort eines LZI Systems auf eine komplexe Exponential-funktion ist wieder eine komplexe Exponentialfunktion *mit der selben Frequenz* aber mit geänderter Amplitude
   - **komplexe Exponentialfunktionen sind “Eigenfunktionen” von LZI Systemen**

Unterscheidung von Signalklassen (Themen dieses VL-Teils)

- verschiedene Signalklassen benötigen verschiedene Varianten der Fourier-Analyse
- Einteilung in:
  - periodische / nichtperiodische Signale
  - zeitkontinuierliche / zeitdiskrete Signale

  daraus resultieren **vier Formen** der Fourier-Analyse, die in diesem VL-Teil behandelt werden
- Und eine **fünfte Form**:
  - zeitbeschränkte, zeitdiskrete Signale
    (vgl. eine Periode der periodischen, zeitdiskreten Form)

  (wichtig für numerische Berechnung durch Computer (DFT))

1. Form: **Fourier Reihe** zur Darstellung *periodischer, zeitkontinuierlicher* Signale

- periodisches Signal $x(t) \in \mathbb{C}$:
  es gilt $\boxed{x(t) = x(t+T)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
  $T \quad \ldots \quad$ **Periode** $(T > 0)$

- **Fourier Reihe:**

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

$a_k \in \mathbb{C}$	...	Fourier-Koeffizienten; $k \in \mathbb{Z}$
ω_0	...	Frequenz der Grundschwingung; $\omega_0 = 2\pi/T$
$k\omega_0$	...	Frequenz der k-ten harmonischen Komponente; der $(k-1)$-ten Oberschwingung

Beispiele

1. Beispiel
   - geg.: $x(t) = \sin \omega_0 t$ periodisch mit $T = 2\pi/\omega_0$
   - ges.: Fourier Reihe
     - Methode: Koeffizientenvergleich
     - Lernziel: Zerlegung der reelwertigen Funktion $\sin \omega_0 t$ in komplexe Exponentialfunktionen
2. Beispiel
   - geg.: $x(t) = 1 + 2\cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \pi/4)$ periodisch mit $T = 2\pi/\omega_0$
   - ges.: Fourier Reihe
     - Methode: Koeffizientenvergleich

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

- Umformung der Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

ergibt

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

$t_0 \in \mathbb{R} \quad \ldots \quad$ beliebiger Startpunkt des Integrationsintervalls

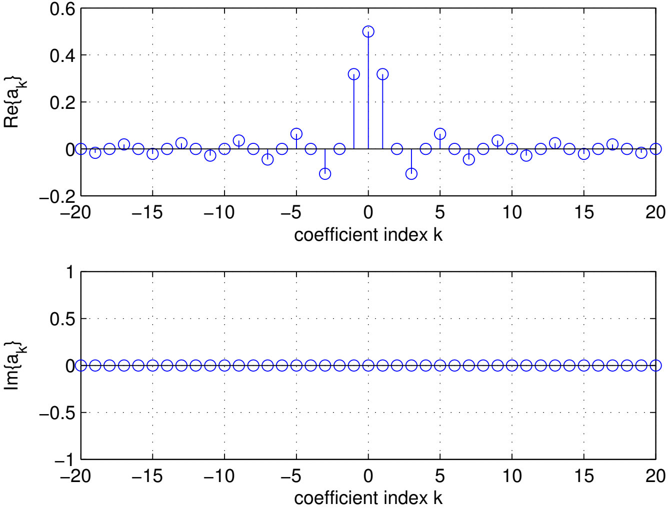
Beispiel

3. Beispiel:
   - geg.: periodisches Rechtecksignal $x(t) = x(t+T)$,

     $$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq T/2 \end{cases}$$

   - ges.: Fourier Reihe; graphische Darstellung der Koeffizienten für $T_1 = T/4$
     - Methode/Lernziel: Berechung der Fourier-Koeffizienten mit Hilfe der Analysegleichung

Beispiel 3 (cont'd)



Konvergenz der Fourier-Reihe (FR):

Ist ein periodisches Signal $x(t)$ tatsächlich als Fourier-Reihe darstellbar?

- sind alle Koeffizienten endlich, also $|a_k| < \infty$ für alle k?
- ist die FR-Darstellung endlich?
- ist die FR-Darstellung gleich dem Originalsignal $x(t)$?

Kriterium der endlichen Energie:

$$\boxed{\int_T |x(t)|^2 dt < \infty}$$

Wenn dieses Kriterium erfüllt ist, dann sind

- alle $|a_k| < \infty$ (Beispiel: Beweis)
- Die **Energie** des Darstellungs**fehlers** geht gegen Null (Konvergenz im Sinne des quadratischen Fehlers)

Konvergenz der Fourier-Reihe (FR) (cont'd):

Dirichlet Bedingungen: Das Signal

- ist **"absolut Integrierbar"**

$$\boxed{\int_T |x(t)| dt < \infty}$$

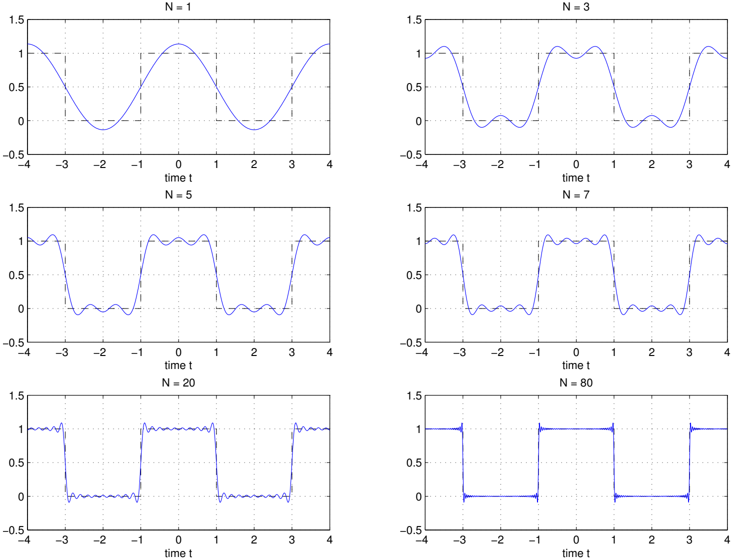
- hat *endlich viele* Schwingungen innerhalb einer Periode T
- hat *endlich viele* Sprünge innerhalb einer Periode T

Dann ist die FR identisch dem Signal $x(t)$ für alle t,

Ausnahme:

- An *Unstetigkeitsstellen* (Sprungstellen) konvergiert die FR zum Mittelwert der rechts- und linksseitigen Grenzwerte
- **Gibbs-Phänomen:** Überschwinger an Sprungstellen bei der Synthese mittels *abgebrochener FR* (Beispiel: Rechtecksignal)

Beispiel 3 (cont'd)



Beispiel

4. Beispiel:

- geg.: periodisches Rechtecksignal (wie in Bsp. 3) $x(t) = x(t+T)$,

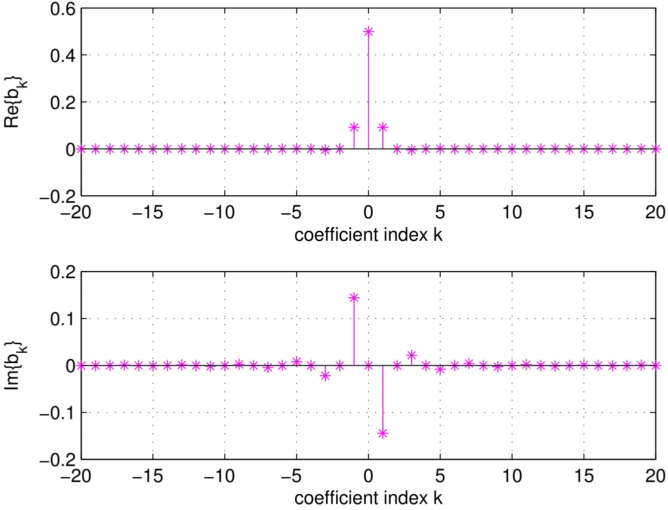
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq T/2 \end{cases}$$

  Die Koeffizienten $\{a_k\}$ sind bekannt; es sei $T_1 = T/4$.
- Das Signal wird durch ein RC-Tiefpassfilter geschickt, mit

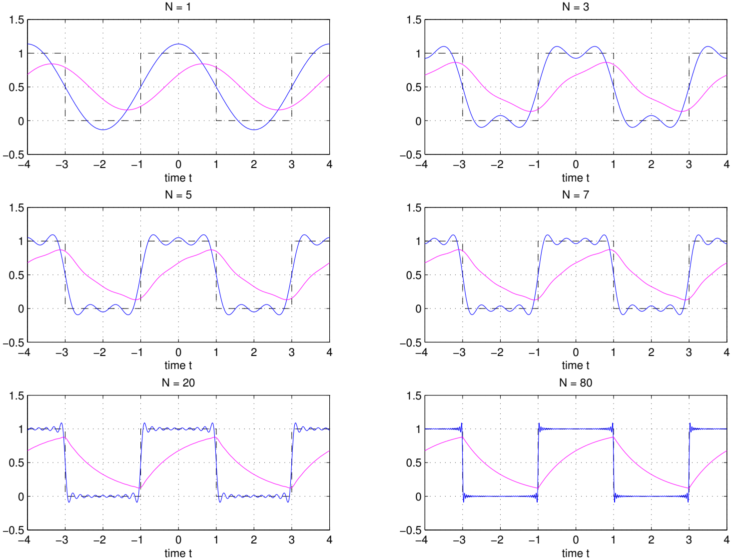
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- ges.: Fourier Reihe des Ausgangssignals $y(t)$
  - Methode/Lernziel: Berechung der Systemantwort einers LZI Systems mittels Fourier-Reihendarstellung und Frequenzgang
  - Konvergenz der FR des Ein- bzw. Ausgangssignals; Symmetrie-Eigenschaften

Beispiel 4 (cont'd)



Beispiel 4 (cont'd)



Zusammenfassung: **Fourier Reihe** für *periodische, zeitkontinuierliche* Signale

- Für ein periodisches Signal $x(t) = x(t+T) \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}} \qquad \text{(Synthesegleichung)}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt} \qquad \text{(Analysegleichung)}$$

$a_k \in \mathbb{C}$ ... Fourier-Koeffizienten; $k \in \mathbb{Z}$
ω_0 ... Frequenz der Grundschwingung; $\omega_0 = 2\pi/T$

- Kurzschreibweise

$$\boxed{x(t) = x(t+T) \overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow} \{a_k\}}$$

Eigenschaften der FR

Geg: Zwei periodische Signale und deren Fourier-Koeffizienten:

$$x(t) = x(t+T) \overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow} \{a_k\}$$

$$y(t) = y(t+T) \overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow} \{b_k\}$$

Linearität:

- es gilt für eine Linearkombination der Signale:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

Zeitverschiebung:

- es gilt für eine verschobene Version des Signals $x(t)$: (Beweis)

$$y(t) = x(t-t_0) \overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-j2\pi k t_0/T}$$

- weitere Eigenschaften siehe Tabelle!

Beispiel

5. Beispiel:
   - geg.: periodisches Rechtecksignal (wie in Bsp. 3) $x(t) = x(t+T)$,

     $$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq T/2 \end{cases}$$

     Die Koeffizienten $\{a_k\}$ sind bekannt; es sei $T_1 = T/4$.
   - ges.: Fourier Reihe des verschobenen Signals

     $$g(t) = x(t - T/4) - 1/2$$

     - Methode/Lernziel: Anwendung der Eigenschaften der FR; Auswirkung auf die Reihendarstellung; Diskussion der Symmetrie-Eigenschaften

Fourier-Reihe für **reelwertige** Signale

Hermitesche Symmetrie der Koeffizienten:

- es gilt für $x(t) = x(t+T) \in \mathbb{R}$

$$x(t) \overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow} \{a_k\} \quad \text{mit} \qquad \begin{aligned} a_k &= a_{-k}^* && \text{hermitesch} \\ |a_k| &= |a_{-k}| && \text{gerade} \\ \angle a_k &= -\angle a_{-k} && \text{ungerade} \\ \mathrm{Re}(a_k) &= \mathrm{Re}(a_{-k}) && \text{gerade} \\ \mathrm{Im}(a_k) &= -\mathrm{Im}(a_{-k}) && \text{ungerade} \end{aligned}$$

- Beweis ergibt **harmonische Form der FR**:

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

mit
$A_k = 2|a_k| \quad \ldots \quad$ Amplitude der k. Harmonischen
$\varphi_k = \angle a_k \quad \ldots \quad$ Phase der k. Harmonischen

Fourier-Reihe für **reelwertige** Signale (cont'd)

eine weitere Form der FR für $x(t) = x(t+T) \in \mathbb{R}$:

- **Trigonometrische Form der FR**:

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(k\omega_0 t) + \beta_k \sin(k\omega_0 t)}$$

$\alpha_k = 2\mathrm{Re}(a_k)$ ... Koeffiz. der **geraden** Funktionsteile

$\beta_k = -2\mathrm{Im}(a_k)$ ... Koeffiz. der **ungeraden** Funktionsteile

- **direkte** Berechnung der Koeffizienten:

$$\alpha_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$
$$\beta_k = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(k\omega_0 t)dt$$

2. Form: **Fourier-Transformation**

- nicht-periodisches Signal $x(t) \in \mathbb{C}$
  - Analyse heißt **Fourier-Transformation**
  - Synthese heißt **inverse Fourier-Transformation**
- **Erklärungsansatz:** Fourier-Reihe, wobei die *Periode* $T \to \infty$ bzw. die *Frequenz der Grundschwingung* $\omega_0 \to 0$

Beispiel:

- geg.: periodisches Rechtecksignal $x(t) = x(t+T)$,

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq T/2 \end{cases}$$

- ges.: Fourier-Koeffizienten für z.B. $T = 4T_1, 16T_1, \ldots;$ Einhüllende der Fourier Koeffizienten Ta_k
  - Lernziel: Auswirkung der steigenden Periode bzw. fallenden Grundfrequenz auf die Fourier-Koeffizienten

Fourier-Transformation: für *nicht-periodische* Signale

Herleitung mittels *Grenzübergang* $T \to \infty$ bzw. $\omega_0 \to 0$:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \to \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

$\tilde{x}(t)$	...	periodisch fortgesetzte Version des Signals $x(t)$
$X(j\omega)$	...	Einhüllende der FR-Koeffizienten Ta_k
ω	...	**kontinuierliche** Frequenzvariable

- Die Einhüllende $X(j\omega)$ wird **Fourier-Transformierte** genannt

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

Beispiele

6. Beispiel:
   - geg.: Rechteckpuls

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

   - ges.: Fourier Transformierte $X(j\omega)$
     - Methode: Berechnung der FT mittels Analysegleichung

7. Beispiel:
   - geg.: Rechtsseitige, reellwertige Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{-at}u(t); \quad a > 0, a \in \mathbb{R}$$

$u(t)$ ... Sprungfunktion

   - ges.: Fourier Transformierte $X(j\omega)$; Diskussion von $X(j\omega)$
     - Methode: Berechnung der FT mittels Analysegleichung

Konvergenz der Fourier-Transformation (FT):

Ist ein Signal $x(t)$ tatsächlich als FT darstellbar?

- ist die Transformierte endlich, also $|X(j\omega)| < \infty$ für alle ω?
- ist die *inverse* FT endlich?
- ist die inverse FT gleich dem Originalsignal $x(t)$?

Kriterium der endlichen Energie:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty}$$

Wenn dieses Kriterium erfüllt ist, dann gilt

- $|X(j\omega)| < \infty$ für alle ω (Beispiel: Beweis)
- Die **Energie** des Darstellungs**fehlers** geht gegen Null (Konvergenz im Sinne des quadratischen Fehlers)

Konvergenz der Fourier-Transformation (FT) (cont'd):

Dirichlet Bedingungen: Das Signal $x(t)$

- ist **“absolut Integrierbar”**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty}$$

- hat *endlich viele* Schwingungen in einem endlichen Intervall
- hat *endlich viele, endlich hohe* Sprünge in einem endl. Intervall

Dann ist die inverse FT identisch dem Signal $x(t)$ für alle t,

Ausnahme:

- An *Unstetigkeitsstellen* (Sprungstellen) konvergiert die FT zum Mittelwert der rechts- und linksseitigen Grenzwerte

Beispiel

8. Beispiel:
   - geg.: periodische, komplexe Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

   - ges.: Fourier Transformierte $X(j\omega)$
     - Methode/Lernziel: Diskussion der Konvergenzbedingungen; Definition des Dirac-Pulses

Definition des Dirac-Pulses $\delta(t)$ (Dirac-Verteilung)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1; \quad \delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0$$

- Ausblendeeigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

für $x(t)$ stetig an der Stelle $t = t_0$

Beispiele

9. Beispiel:
   - geg.: Dirac-Puls bei $t = 0$

$$x(t) = \delta(t)$$

   - ges.: Fourier Transformierte $X(j\omega)$
     - Methode: Berechnung der FT mittels Analysegleichung und Ausblendeeigenschaft

10. Beispiel:
   - geg.: Dirac-Puls im Frequenzbereich

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

   - ges.: inverse Fourier Transformierte $x(t)$
     - Methode: Berechnung der inversen FT mittels Synthesegleichung und Ausblendeeigenschaft
     - Lernziel: **Fourier-Transformation periodischer Funktionen mittels Dirac-Puls** (vgl. Bsp. 8)

Zusammenfassung: **Fourier Transformation** für *nicht-periodische, kontinuierliche* Signale

- Für ein nicht-periodisches Signal $x(t) \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

Fourier Transformation (Analysegleichung)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

inverse Fourier Transf. (Synthesegleichung)

$X(j\omega)$ ... Fourier Transformierte

- Kurzschreibweise

$$\boxed{x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)}$$

Eigenschaften der Fourier Transformation

Geg: Zwei Signale und deren Fourier-Transformierte:

$$x(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$y(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega)$$

Linearität:

- es gilt für eine Linearkombination der Signale:

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Z(j\omega) = AX(j\omega) + BY(j\omega)$$

Zeitverschiebung:

- es gilt für eine verschobene Version des Signals $x(t)$: (Beweis)

$$y(t) = x(t - t_0) \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

- weitere Eigenschaften siehe Tabelle!

Beispiel

11. Beispiel:
    - geg.: Periodische Funktion

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

    - ges.: Fourier Transformierte $X(j\omega)$
        - Methode: Berechnung der FT mittels Transformationspaar $e^{j\omega_0 t} \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (merken!); Linearitätseigenschaft

3. Form: **Fourier-Reihe** zur Darstellung periodischer, zeit*diskreter* Signale

- **zeitdisktretes** Signal $x[n]$; $\boxed{n \in \mathbb{Z}}$ ist ganzzahlig
  - z.B. abgetastetes kontinuierliches Signal $x[n] = x(nT_s)$ mit Abtastperiode T_s
- **periodisches,** zeitdisktretes Signal $x[n] \in \mathbb{C}$:

  es gilt $\boxed{x[n] = x[n+N]}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$

  N ... **Periode** ($N \in \mathbb{N}$, also $N > 0$)

- **Fourier-Reihe:**

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\theta_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$a_k \in \mathbb{C}$	...	Fourier-Koeffizienten; $k \in \mathbb{Z}$
θ_0	...	Grundfrequenz $\theta_0 = 2\pi/N$
$\langle N \rangle$	...	Indexmenge der Reihenglieder

Diskussion: Zeitdiskrete, komplexe Exponentialfunktionen mit Periode N

- Die zeitdiskrete (ZD) Exponentialfunktion

  $$x[n] = e^{j\theta n}$$

  ist periodisch mit der Periode N, wenn $\theta = k\frac{2\pi}{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ also

  $$x[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\theta_0 n}$$

  mit $\theta_0 = 2\pi/N$
  - Bsp.: Beweis der Periodizität
  - Bsp.: Illustration in der komplexen Ebene

- **Beachte:** es gibt *genau* N **verschiedene** ZD, komplexe Exponentialfunktionen *mit Periode* N

Fourier-Reihe für zeit*diskrete* Signale (cont'd)

daraus folgt für die Fourier-Reihe:

- es genügt, **genau** N **verschiedene** Reihenglieder zu betrachten

$$x[n] = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$k_0 \in \mathbb{Z}$	...	beliebiger Startindex
$\langle N\rangle$	...	allg. Indexmenge der Reihenglieder;
		z.B.: $\langle N\rangle = \{k_0, k_0+1, \ldots, k_0+N-1\}$

- kein **Konvergenz**problem: wegen endlicher Anzahl von Reihengliedern

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

- Umformung der Fourier-Reihe

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

ergibt

$$\boxed{a_k = a_{k\pm N} = a_{k\pm 2N} = \cdots = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

$n_0 \in \mathbb{Z} \quad \ldots \quad$ beliebiger Startindex der Summe

Zusammenfassung: **Fourier-Reihe** für *periodische, zeitdiskrete* Signale

- Für ein periodisches Signal $x[n] = x[n+N] \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\theta_0 n}} \qquad \text{(Syntheseglg.)}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\theta_0 n}} \qquad \text{(Analyseglg.)}$$

$a_k \in \mathbb{C}$	...	Fourier-Koeffizienten; $k \in \mathbb{Z}$
$a_k = a_{k+N}$	...	Periodizität der Koeffizienten ($\forall k \in \mathbb{Z}$)
θ_0	...	Frequenz der Grundschwingung; $\theta_0 = 2\pi/N$

Beispiele (ZD-FR)

12. Beispiel:
    - geg.: N-periodisches ZD Signal

$$x[n] = \sin(\theta_0 n), \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

    - ges.: Koeffizienten der Fourier-Reihe $\{a_k\}$; Darstellung
        - Methode/Lernziel: Berechnung der Fourier-Koeffizienten mittels Koeffizientenvergleich; Illustration der Periodizität

13. Beispiel:
    - geg.: ZD periodisches Rechtecksignal $x[n] = x[n+N], \forall n \in \mathbb{Z}$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -N_1 \leq n \leq N_1; \quad N_1 \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

    - ges.: ZD Fourier-Reihe
        - Methode: Berechnung der Fourier-Koeffizienten mittels Analyseglg.; Verwendung der endlichen geometrischen Reihe

5. Form: Diskrete Fourier-Transformation **(DFT)**

- Für **endliche** ZD Signale $x[n] \in \mathbb{C}$ der Länge N, $n = \{0, 1, \ldots, N-1\}$
- **gedachte** N-periodische Fortsetzung; Verwendung der ZD FR
- Schreibweise (N-Punkt DFT):

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} \quad \text{inverse DFT (Syntheseglg.)}$$

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}} \quad \text{DFT (Analyseglg.)}$$

$X[k]$	$\ldots$	DFT von $x[n]$, $k = \{0, 1, \ldots, N-1\}$
$X[k] = N a_k$	$\ldots$	Definition durch Koeffizienten der ZD FR

Beispiel (DFT)

14. Beispiel:
    - geg.: ZD Signal der Länge N

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 1, n = N-1 \\ 0 & n = 0, 2, 3, \ldots, N-2 \end{cases}$$

    - ges.: N-Punkt DFT
        - Methode/Lernziel: Berechnung der DFT; Modulo-N Symmetrie

4. Form: **Zeitdiskrete Fourier-Transformation**

- nicht-periodisches Signal $x[n] \in \mathbb{C}$
- **Ansatz:** ZD Fourier-Reihe; *Periode* $N \to \infty$ bzw. *Frequenz der Grundschwingung* $\theta_0 \to 0$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\theta_0}) e^{jk\theta_0 n} \theta_0 \to \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta}$$

$\tilde{x}[n]$	...	periodisch fortgesetzte Version des Signals $x[n]$
$X(e^{j\theta})$	...	Einhüllende der FR-Koeffizienten $N a_k$
θ	...	**kontinuierliche** Frequenzvariable

- Die Einhüllende $X(e^{j\theta})$ wird **zeitdiskrete Fourier-Transformierte (DTFT)** genannt

$$\boxed{X(e^{j\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n}}$$

Beispiele (DTFT)

15. Beispiel:
    - geg.: ZD Rechteckpuls

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

    - ges.: DTFT
        - Methode: Berechnung der DTFT mittels Analyseglg.; Verwendung der endlichen geometrischen Reihe

16. Beispiel:
    - geg.: ZD, rechtsseitige Exponentialfunktion

$$x[n] = a^n u[n]; \quad 0 < a < 1; a \in \mathbb{R}$$

$u[n]$ ... ZD Sprungfunktion

    - ges.: DTFT
        - Methode/Lehrziel: Berechnung der DTFT mittels Analyseglg.; Diskussion von Betrag und Phase; graphische Darstellung

Zusammenfassung: **DTFT** für *nicht-periodische, zeitdiskrete* Signale

- Für ein nicht-periodisches Signal $x[n] \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\boxed{X(e^{j\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n}}$$

ZDFT bzw. DTFT (Analysegleichung)

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta}$$

inverse ZDFT (IDTFT) (Synthesegleichung)

$X(e^{j\theta})$ ... zeitdiskrete Fourier-Transformierte (DTFT); DTFT ist periodisch mit 2π; $\theta \in \mathbb{R}$

Überblick: 5 Formen der Fourier-Analyse

	Zeitbereich		Frequenzbereich
Fourier-Reihe	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ **periodisch** zeitkontinuierlich	$\overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow}$	$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ **diskret** aperiodisch
Fourier-Transf.	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ **aperiodisch** zeitkontinuierlich	$\overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow}$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ **kontinuierlich** aperiodisch
Fourier-Reihe (ZD-FR)	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ periodisch **zeitdiskret**	$\overset{\text{FR}}{\longleftrightarrow}$	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ diskret **periodisch**
Fourier-Transf. (DTFT)	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$ aperiodisch **zeitdiskret**	$\overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow}$	$X(e^{j\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n}$ kontinuierlich **periodisch**
N-Punkt DFT	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ zeitdiskret, **endlich**	$\overset{N}{\longleftrightarrow}$	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ diskret, **endlich**

Literatur und Ressourcen

Bücher

- A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab: Signals and Systems. Prentice-Hall, 1996 (2nd ed.)
- A. Papoulis: Circuits and Systems. Oxford Univ. Press, 1979.
- O. Föllinger: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Huethig, 2003 (8th ed.)

Vorlesungsunterlagen: (online)

- dieser Foliensatz
- Tabelle der Transformationseigenschaften
- Unterlagen zu den Zusatzübungen
- Prüfungsbeispiele und Lösungen

`http://www.spsc.tugraz.at/courses/signaltransformationen`