Formelsammlung (V. 1.1)

Signal Processing and Speech Communication Laboratory, Graz University of Technology

Achtung: Formelsammlung wird am Ende der Prüfung wieder abgesammelt. Nicht auf die Blätter dieser Formelsammlung schreiben!

Fouriertransformation zeitdiskreter Signale—Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

Bei den folgenden Beziehungen sind der Definitionsbereich $n \in \mathbb{Z}$ im Zeitbereich sowie die 2π-Periode im Frequenzbereich zu berücksichtigen. Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einheitsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ ist die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente. Weiters definieren wir die Funktion $\delta_{2\pi}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$.

$$
\begin{aligned}
x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta n} \\
x[n-n_0] \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-j\theta n_0}X(e^{j\theta}) \\
e^{j\theta_0 n}x[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\theta-\theta_0)}) \\
x^*[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X^*(e^{-j\theta}) \\
x[-n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\theta}) \\
(x*y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta}) \\
x[n]y[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}(X*Y)(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\lambda})Y(e^{j(\theta-\lambda)})d\lambda \\
x_e[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] + x^*[-n]\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Re e\{X(e^{j\theta})\} \\
x_o[n] = \frac{1}{2}\big(x[n] - x^*[-n]\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad j\Im m\{X(e^{j\theta})\} \\
\Re e\{x[n]\} \quad &\Longleftrightarrow \quad X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}\big(X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta})\big) \\
j\Im m\{x[n]\} \quad &\Longleftrightarrow \quad X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}\big(X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta})\big) \\
nx[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad j\frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta} \\
\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-e^{-j\theta}}X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j\theta})\delta_{2\pi}(\theta)
\end{aligned}
$$

Einige DTFT-Paare

$$
\begin{aligned}
x[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j\theta}) \\
\delta[n-n_0] \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-j\theta n_0} \\
e^{j\theta_0 n} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) \\
\cos(\theta_0 n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \pi\big(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\big) \\
\sin(\theta_0 n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{j}\big(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) - \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\big) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \frac{2\pi}{N}k) \\
u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta) \\
\alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}} \\
\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi \quad &\Longleftrightarrow \quad X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases} \\
x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-j\frac{N-1}{2}\theta}
\end{aligned}
$$

Parsevalsche Beziehung für (aperiodische) zeitdiskrete Signale:

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta
$$

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

In den folgenden Beziehungen sind $x[n]$ und $y[n]$ sowie deren diskrete Fouriertransformationen $X[k]$ und $Y[k]$ N-Punkte Folgen mit dem Definitionsbereich $0 \leq n < N$ bzw. $0 \leq k < N$. Die Verschiebungsoperation ist bei endlichem Definitionsbereich nur als zyklische Verschiebung $x[(n-n_0) \bmod N]$ definiert, welche als Ausschnitt von $0 \ldots N-1$ einer Verschiebung der periodischen Fortsetzung von $x[n]$ btrachtet werden kann. Folglich ist auch die Faltung nur als zyklische Faltung definiert, die hier als $(x \overset{N}{*} y)[n]$ notiert wird.

$$
\begin{aligned}
x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad &\Longleftrightarrow \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\
x[(n-n_0) \bmod N] \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k} X[k] \\
e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} x[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X[(k-k_0) \bmod N] \\
x^*[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X^*[(-k) \bmod N] \\
x^*[(-n) \bmod N] \quad &\Longleftrightarrow \quad X^*[k] \\
(x \overset{N}{*} y)[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad X[k] Y[k] \\
x[n] y[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{N}(X \overset{N}{*} Y)[k] \\
\frac{1}{2}\big(x[n] + x^*[(-n) \bmod N]\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Re e\{X[k]\} \\
\frac{1}{2}\big(x[n] - x^*[(-n) \bmod N]\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad j\Im m\{X[k]\} \\
\Re e\{x[n]\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(X[k] + X^*[(-k) \bmod N]\big) \\
j\Im m\{x[n]\} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\big(X[k] - X^*[(-k) \bmod N]\big)
\end{aligned}
$$

Einige DFT-Beispiele

Es gilt: $0 \leq n < N$, $0 \leq k < N$ und $0 \leq m < N$

$$
\begin{aligned}
e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \quad &\Longleftrightarrow \quad N\delta[k-m] \\
\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{N}{2}\big(\delta[k-m] + \delta[k+m-N]\big) \\
\sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{N}{2j}\big(\delta[k-m] - \delta[k+m-N]\big) \\
\delta[n] \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 \\
x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N - N_1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{Z}$-Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \Longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen $\mathcal{Z}$-Transformation und können in einzelnen Fällen auch größer sein.

$x[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$y[n]$	$\Longleftrightarrow$	$Y(z)$	$R_{y_-} < \lvert z\rvert < R_{y_+}$
$ax[n] + by[n]$	$\Longleftrightarrow$	$aX(z) + bY(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z\rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n - n_0]$	$\Longleftrightarrow$	$z^{-n_0} X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$z_0^n x[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(\frac{z}{z_0})$	$\lvert z_0\rvert R_{x_-} < \lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert R_{x_+}$
$nx[n]$	$\Longleftrightarrow$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$x^*[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X^*(z^*)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$x[-n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < \lvert z\rvert < \frac{1}{R_{x_-}}$
$\Re e\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\big(X(z) + X^*(z^*)\big)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$j\Im m\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\big(X(z) - X^*(z^*)\big)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$(x * y)[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(z)Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z\rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n]y[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-}R_{y_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}R_{y_+}$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < \lvert z\rvert < R_{x_+}$

Anfangswertsatz der einseitigen $\mathcal{Z}$-Tranformation:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Endwertsatz der einseitigen $\mathcal{Z}$-Transformation

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} (z-1) X(z)$$

Eingeschaltetes periodisches Signal:

$$x[n] = x_p[n]u[n] \Longleftrightarrow X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] z^{-n}\right)$$

mit $x_p[n] = x_p[n + N]$

Einige $\mathcal{Z}$-Transformationspaare

$\delta[n]$	$\Longleftrightarrow$	1	$\forall z$
$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$nu[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-nu[-n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\sin(\alpha n)u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z\sin\alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(\alpha n)u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z(z-\cos\alpha)}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\rho^n \sin(\alpha n)u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\rho z\sin\alpha}{z^2 - 2\rho z\cos\alpha + \rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
$\rho^n \cos(\alpha n)u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z(z-\rho\cos\alpha)}{z^2 - 2\rho z\cos\alpha + \rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
$\sin(\alpha n + \varphi)u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{z^2\sin\varphi + z\sin(\alpha-\varphi)}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\frac{1}{n}, \quad n > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\log_e\left(\frac{z}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1$
$\frac{1-e^{-\alpha n}}{n} u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha + \log_e\left(\frac{z-e^{-\alpha}}{z-1}\right)$	$\lvert z\rvert > 1,\ \alpha > 0$
$\frac{\sin(\alpha n)}{n} u[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\alpha + \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{z-\cos\alpha}\right)$	$\lvert z\rvert > \cos\alpha,\ \alpha > 0$

Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung

In den angegebenen Formeln sind der Unterabtastfaktor M und der Überabtastfaktor L ganzzahlig.

$$x[n] \Longleftrightarrow X(e^{j\theta}), \quad X(z)$$

$$y[m] = x[Mm] \Longleftrightarrow Y(e^{j\theta'}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\theta'-2\pi k)/M})$$

$$Y(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M})$$

$$y[m] = \begin{cases} x[\frac{m}{L}], & m = 0, \pm L, \pm 2L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Longleftrightarrow Y(e^{j\theta'}) = X(e^{j\theta' L})$$

$$Y(z) = X(z^L)$$

Polyphasenzerlegung:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} X_k(z^M)$$

mit

$$X_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k[m]z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[Mm+k]z^{-m} \qquad k = 0, 1, ..., M-1$$

Fall M=2:

$$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1}X_1(z^2)$$

$$X_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m]z^{-m}$$

$$X_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m+1]z^{-m}$$

Elementare Vertauschungsoperationen